



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA
Escuela de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos
y de Ingeniería de Minas

INGENIERÍA TÉCNICA DE OBRAS PÚBLICAS
ESPECIALIDAD EN HIDROLOGÍA

15-7-2014

ESTUDIO TEÓRICO DE ESTRUCTURAS HIDRÁULICAS

PROYECTO FINAL DE CARRERA

CARMEN FRUTOS CARAVACA

Dirigido por:

CARLOS ANGOSTO HERNÁNDEZ

Departamento de Matemática Aplicada y
Estadística

Prof. de Fund. Matemáticos de la Ingeniería

ÍNDICE

1.- INTRODUCCIÓN	5
2.- OBJETIVOS	6
3.- FUNDAMENTOS TEÓRICOS	7
3.1.- CANALES	7
3.1.1.- Antecedentes históricos	8
3.1.1.1.- Antiguo Egipto	9
3.1.1.2.- Mesopotamia y antigua Grecia	10
3.1.1.3.- Antigua Roma	11
3.1.1.4.- China	12
3.1.1.5.- El turismo fluvial en Europa	13
3.1.1.6.- Construcción fluvial en España	17
3.1.1.6.1.- Política hidráulica	19
3.1.1.6.2.- Trasvases	22
3.1.2.- Tipos de canales	25
3.1.3.- Elementos geométricos de la sección de un canal	26
3.1.4.- Tipos de flujo en un canal	28
3.1.5.- Pérdidas de carga en canales y tuberías	30
3.2.- VERTEDEROS	37
3.2.1.- Funciones del vertedero	38
3.2.2.- Clasificación de los vertederos	39
3.2.2.1.- Clasificación según su forma geométrica	40
3.2.2.1.1.- Vertedero rectangular	40
3.2.2.1.2.- Vertedero triangular	42
3.2.2.1.3.- Vertedero trapezoidal	43

3.2.2.1.4.- Vertedero circular	45
3.2.2.2.- Clasificación según la pared de vertido	47
3.2.2.2.1.- Vertedero de pared delgada	47
3.2.2.2.2.- Vertedero de pared ancha	50
3.2.2.2.3.- Vertedero con perfil Creager	51
3.2.2.3.- Clasificación según la forma geométrica y la pared de vertido	52
3.2.2.3.1.- Vertederos rectangulares de pared delgada sin contracciones	52
3.2.2.3.2.- Vertederos rectangulares de pared delgada con contracciones	54
3.2.3.- Requisitos generales de instalación de vertederos	56
3.3.- FUNDAMENTOS HIDRÁULICOS	57
3.3.1.- Hidrostática	57
3.3.2.- Cinemática	60
3.3.3.- Hidrodinámica	63
3.4.- FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	70
3.4.1.- Ecuaciones diferenciales ordinarias	70
3.4.1.1.- Ecuaciones diferenciales de primer orden	71
3.4.1.1.1.- Variables separadas	71
3.4.1.1.2.- Ecuaciones de la forma $y' = f(ax + by)$	72
3.4.1.1.3.- Ecuaciones de la forma $y' = f(y/x)$	72
3.4.1.1.4.- Ecuaciones lineales de primer orden	73
3.4.1.2.- Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes	74
3.4.1.2.1.- Sin término independiente	75
3.4.1.2.2.- Con término independiente variable	76

3.4.1.3.- Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de orden 1 con coeficientes constantes	79
3.4.2.- Métodos numéricos en ecuaciones diferenciales ordinarias	80
3.4.2.1.- Método de Euler	80
3.4.2.2.- Métodos de Runge-Kutta	82
3.4.2.2.1.- Método de Runge-Kutta de segundo orden	83
3.4.2.2.2.- Método de Runge-Kutta de tercer orden	84
3.4.2.2.3.- Método de Runge-Kutta de cuarto orden	86
3.4.2.3.- Estabilidad	87
3.4.2.4.- Método de Euler modificado	88
3.4.2.5.- Métodos numéricos para sistemas	89
4.- ESTUDIOS TEÓRICO-PRÁCTICOS	90
4.1.- ESTUDIO TEÓRICO	90
4.1.1.- Tiempo de vaciado de depósitos	90
4.1.1.1.- Tiempo de vaciado de un depósito cualquiera	91
4.1.1.2.- Depósito cilíndrico de radio R	93
4.1.1.3.- Depósito cónico de radio R	95
4.1.1.4.- Depósito trapezoidal	97
4.1.1.5.- Depósito con forma esférica de radio R	100
4.1.2.- Sección óptima de un canal	103
4.1.2.1.- Deducir cuál es la sección más favorable hidráulicamente de un canal rectangular	104
4.1.2.2.- Deducir cuál es la sección más favorable hidráulicamente de un canal triangular	106

4.1.2.3.- Deducir cuál es la sección más favorable hidráulicamente de un canal circular	108
4.1.2.4.- Deducir cuál es la sección más favorable hidráulicamente de un canal irregular	110
4.1.3.- Caudal desaguado por vertederos rectangulares	112
4.1.3.1.- Pared delgada	112
4.1.3.2.- Pared gruesa	114
4.1.3.3.- Perfil de tipo Creager	116
4.1.4.- Dimensionamiento de un aliviadero	118
4.2.- ANÁLISIS DEL ESTUDIO TEÓRICO	120
4.2.1.- Estudio de la velocidad de salida del agua en un depósito	120
4.2.2.- Aplicación del programa <i>máxima</i> al tiempo de vaciado de depósitos	123
4.2.2.1.- Programación de <i>máxima</i>	123
4.2.2.2.- Vaciado de depósitos mediante <i>máxima</i>	125
4.2.2.3.- Vaciado de depósitos mediante <i>máxima</i> considerando la velocidad superficial	130
5.- CONCLUSIONES	142
6.- BIBLIOGRAFÍA	145

1.- INTRODUCCIÓN

Desde el inicio de la existencia del hombre, la vida del ser humano ha estado unida al agua. A lo largo del tiempo, el hombre ha tenido la necesidad de controlar este recurso para dosificar su uso, bien para abastecimiento, irrigación, aprovechamiento hidroeléctrico o, simplemente, para controlar avenidas. Para ello, las estructuras construidas, poco a poco, han ido mejorando, a la vez que los estudios sobre hidráulica van avanzando día a día.

Queda patente, por tanto, la importancia de las estructuras cuya finalidad es controlar el caudal desaguado en un emplazamiento. Estas estructuras dotan al hombre del poder de almacenamiento del agua en un embalse y variar el nivel de éste a su antojo, según sean sus necesidades.

Las estructuras de control son aquellas por las que el hombre cambia, a su voluntad, los parámetros que definen el comportamiento del agua a su paso por un lugar. Influyen, por tanto, entre otras, las condiciones de contorno, la velocidad del flujo y el calado del mismo. Se puede abrir la compuerta de un depósito para liberar agua, en cualquier momento, y utilizarla con diversos fines, como pueden ser, el consumo humano, el agrícola o el hidroeléctrico. O, al contrario, cerrar dicha compuerta para evitar el paso del agua y, poder así, almacenarla para su posterior uso en épocas de sequía o en un momento determinado de necesidad.

El agua que fluye por el depósito, pasa de estar aguas arriba del depósito, con una velocidad muy reducida, o nula, como veremos más adelante, a una velocidad claramente superior, aguas abajo. La velocidad de salida del agua dependerá de varios parámetros, como pueden ser las dimensiones de la abertura o la altura de carga aguas arriba.

Estas mismas condiciones son aplicables a los vertederos, por ello, hemos realizado un estudio exhaustivo de ambos tipos de estructuras, para ver cómo se comportan bajo diferentes situaciones.

También hemos realizado un análisis de la velocidad superficial en un depósito, para comprobar si es correcto considerarla como nula o si es necesario incluir su valor en los cálculos de caudal; y hemos estudiado la sección óptima en canales de diferentes clases.

2.- OBJETIVOS

El fin de este trabajo es la comprensión de la teoría sobre los depósitos, vertederos y cierto tipo de canales y cómo se comporta el flujo al pasar por ellas.

Para ello, comenzamos recopilando la información y los datos que necesitaremos posteriormente, así como la explicación de algunos conceptos y antecedentes históricos relacionados con nuestros objetos de interés.

Información que hemos considerado básica para obtener una idea de cómo funcionan estas estructuras y cómo han evolucionado a lo largo de la historia.

Tras la toma de datos, realizamos una serie de estudios para ver cómo varían los parámetros de los depósitos, canales y vertederos bajo una serie de condiciones iniciales.

Más tarde, procedemos a analizar una serie de supuestos concretos mediante el programa *Máxima*, con el que hallaremos el tiempo de vaciado de diferentes depósitos o la altura del agua para un tiempo determinado y veremos así si se cumplen las afirmaciones que habíamos realizado previamente sobre dichos tiempos.

Además, hemos realizado una variante en la velocidad de salida del flujo de un depósito, para comprobar qué ocurriría al no considerar despreciable la velocidad del flujo cuando se encuentra en la superficie de éste.

3.- FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1.- CANALES

En ingeniería, se denomina canal a una construcción destinada al transporte de fluidos – generalmente utilizada para agua – y que, a diferencia de las tuberías, es abierta a la atmósfera. También se utilizan como vías artificiales de navegación. La descripción del comportamiento hidráulico de los canales es una parte fundamental de la hidráulica y su diseño pertenece al campo de la ingeniería hidráulica, una de las especialidades de la ingeniería civil.

Cuando un fluido es transportado por una tubería parcialmente llena, se dice que cuenta con una cara a la atmósfera, por lo tanto se comporta como un canal.



Fotografía de los canales de Holanda

3.1.1.- ANTECEDENTES HISTÓRICOS

El conocimiento empírico del funcionamiento de los canales se remonta a varios milenios.

En la antigua Mesopotamia se usaban canales de riego mientras que en la Roma Imperial se abastecían de agua a través de canales contruidos sobre inmensos acueductos.

Los habitantes del antiguo Perú contruyeron una serie de canales, de los cuales algunos de ellos continúan funcionando en la actualidad. Un ejemplo de ello son los canales de Cumbemayo, pertenecientes a la ciudad de Cajamarca, ubicada en la vertiente oriental de la Cordillera de los Andes, en la sierra norte del país y son el centro hidráulico más importante de los Andes.

El conocimiento y estudio sistemático de los canales se remonta al siglo XVIII, con Chézy, Bazin y otros.



Canales de Cumbemayo, Cajamarca, Perú

Podemos encontrar gran variedad de obras hidráulicas, procedentes de diversas épocas históricas, en numerosas partes del mundo.

3.1.1.1.- ANTIGUO EGIPTO

Se tiene constancia de que varios reyes de Egipto intentaron unir el mar Rojo con el Mediterráneo.

Los egipcios fueron, sin duda, los primeros pueblos que se sirvieron de canales para fertilizar los campos con las aguas del Nilo y, cuando las tierras se hallaban demasiado altas, empleaban máquinas para elevar el agua a la altura necesaria.

Algunos suponen que la mayor parte de las bocas del Nilo fueron canales abiertos por la mano del hombre.

Sesostris I y sus sucesores intentaron poner en comunicación el Nilo con el mar Rojo, en cuya empresa perecieron, durante el reinado de Neco, unos ciento veinte mil hombres. Este proyecto se abandonó por la predicción de un oráculo que manifestó que por este medio se abriría quizá un pasaje a los bárbaros.

Había en Egipto otros canales, pero estos servían más para el riego que para la navegación. El mayor de todos fue el que Moeris hizo construir para conducir las aguas del Nilo al gran lago que había mandado hacer. Se asegura que este canal tenía ochenta estadios de largo y trescientos pies de ancho, cuya entrada podía abrirse y cerrarse según convenía.



Canal de Moeris en la actualidad, Egipto

Dibujo del lago Moeris

3.1.1.2.- MESOPOTAMIA Y ANTIGUA GRECIA

Nos consta que, sobre el año 330 a. C., ya existía un canal que unía el río Tigris con el Euleom. Canal que sirvió a Alejandro Magno en sus numerosas conquistas.

Otro ejemplo de este tipo es el canal de Corinto: una vía de agua artificial que une el golfo de Corinto con el mar Egeo por el istmo de Corinto, abriendo esta vía al transporte marítimo y separando el Peloponeso del resto de Grecia.

Aunque el proyecto no se concretó hasta el siglo XIX, la idea venía concibiéndose desde al menos el siglo VII a. C., cuando el tirano Periandro de Corinto pensó en ejecutar una obra similar pero se vio obligado a cancelarla debido a las dificultades técnicas, insalvables para la época, construyendo en su lugar una rampa de piedra sobre el istmo de Corinto a la que se conoce como diolkos, y cuyos restos pueden verse todavía hoy discurriendo de forma paralela al canal.



Canal de Corinto



Canal de Corinto (desde satélite)



Diolkos

3.1.1.3.- ANTIGUA ROMA

El historiador griego Plutarco cuenta que el militar romano Cayo Mario hizo abrir un canal entre el mar y el río Ródano para transportar fácilmente los víveres que necesitaba para llevar a cabo sus empresas.

Druso Nerón puso en comunicación, por el año 712 a. C., el río Rhin con el Isel por medio de un canal del que se sirvió después Germánico, en el año 16 de nuestra era.

Corbulón, por las órdenes de Claudio, hizo un canal de unos 32 Km de largo, por el que puso en comunicación el río Mosa con el Rhin.

Aunque los principales canales construidos por los romanos se llevaron a cabo como tácticas bélicas, para facilitar los transportes y las vías de comunicación, no descuidaron, por ello, los canales de riego.

Vitrubio habla de la construcción de estos canales con mucha extensión.



Mapa del canal Corbulo, copia del de la Antigua Roma

3.1.1.4.- CHINA

Los chinos han aventajado a los griegos, a los romanos y, en una palabra, a todos los pueblos en la construcción de canales.

Según todas las noticias que tenemos de este pueblo, se ocuparon ya desde la más remota antigüedad en la conducción y distribución de las aguas.

En el año 604, el emperador Yang Guang de la dinastía Sui ordenó la construcción del Gran Canal entre Pekín y Hangzhou.

En su origen se trataba de una serie de vías que convergían con la ciudad de Pekín y Tianjin.

La construcción comenzó durante la dinastía Sui (581-618) y llegó a cubrir poco más de 1.700 kilómetros.

En su tiempo constituyó el canal de agua más largo del mundo hecho por el hombre y su misión era satisfacer las necesidades de las ciudades importantes.



Curso actual del Gran Canal de China

3.1.1.5.- EL TURISMO FLUVIAL EN EUROPA

Existen antecedentes remotos en la realización de canales, tanto de regadío como para la navegación, que nos trasladan en el tiempo a siglos antes de Cristo y en el espacio a países tanto europeos como del lejano Oriente. Pero será a finales de la Edad Media cuando los canales comiencen a tener una importancia destacada en Europa. En los Países Bajos su desarrollo es significativo, empezándose a aplicar allí algunas novedades tecnológicas. En Italia, particularmente en Lombardía, canales que en principio fueron construidos para el regadío se van transformando para la navegación, aplicando considerables innovaciones tecnológicas que la favorecieron: esclusas, puentes, acueductos, etc.

Durante el XVI, siglo del Renacimiento, habrá un gran desarrollo de los canales y de la navegación fluvial en varios países europeos (Italia, Francia, Alemania, Holanda...); para ello se fomentaron y llevaron a cabo importantes proyectos de ingeniería hidráulica, como las compuertas tipo mitra inventadas por Leonardo da Vinci.



Compuertas tipo mitra con cierre de diedro. Canal de Castilla

Desde el siglo XV hasta nuestros días, descubrimos las grandes etapas del desarrollo del turismo fluvial en Europa:

Desde el comienzo de la humanidad se han utilizado diferentes tipos de embarcaciones, que han ido evolucionando, para navegar sobre los lagos y ríos, para sus desplazamientos y para transportar mercancías. El transporte fluvial se desarrolló durante siglos en gran parte gracias a las técnicas de construcción naval.

- En el siglo XV, por el desarrollo y novedades que trajeron los arquitectos y constructores franceses, comienzan a construirse los canales. Esta evolución produce que aumente el tráfico fluvial entre las diferentes zonas y permiten el desarrollo de la navegación fluvial:
 - Las esclusas con cámara, formada con dos puertas, entre las cuales se encuentra una cámara que sirve para cambiar de nivel y así recuperar la diferencia de altura entre una parte y otra del canal. Este tipo de esclusa es aún muy utilizado en los canales.
 - El canal de alimentación artificial permite una mejor gestión de los niveles de agua.
- En el siglo XVII, el primer canal de reparto fue el Canal de Briare uniendo por vía navegable los ríos Loira y Sena.

Inaugurado en 1681, el Canal de Midi une el Océano Atlántico con el Mar Mediterráneo. Su creador, financiero y arquitecto Pierre Paul Riquet, fue el primero en crear un estanque para alimentar su canal. La construcción de este canal comenzó en el reinado de Louis XIV en 1661 para terminarse en 1681. Con el paso de los siglos se transformó en uno de los más bellos patrimonios del mundo, declarado así por la UNESCO.

*Canal de
Midi.
Francia*





Esclusas del Canal de Midi

- A partir del siglo XVIII, la navegación fluvial se desarrolla gracias a los canales de unión. Estos canales permiten crear una unión entre ríos de dos regiones diferentes o remplazar la circulación marítima de mercancías por transportes fluviales interiores.
- En el siglo XIX, el canal se convierte en una red estratégica y una necesidad económica. Empieza a unir los países (especialmente entre Francia y Bélgica) y favorecerá enormemente los intercambios comerciales en el territorio europeo. En esta época, ya cuentan más de 468 Km de canales en Francia.

Durante la segunda mitad del siglo XIX, la navegación fluvial conoció un auge importante. La invención del embalse permitió especialmente canalizar pequeños y grandes ríos navegables como el Yonne y el Sena e incrementar de esta manera la red de las vías navegables europeas. En efecto, Europa cuenta entre sus países con las más largas redes fluviales navegables: Francia (8500 Km), Alemania (7339 Km) y Finlandia (6120 Km). La parte más grande de la red continental de las vías navegables (ríos navegables y canales) está concentrada en Europa central.



Canales de Brujas. Bélgica

- Es solo a partir del siglo XX, después de la Primera Guerra Mundial, cuando empieza a interesar el turismo fluvial, especialmente en la región de los Norfolk Broads (Inglaterra), cuna del turismo fluvial moderno. Hoy, Europa es el destino principal para el turismo fluvial y, gracias al desarrollo del alquiler de barcos sin licencia, numerosos aficionados del mundo entero descubren cada año los encantos y los tesoros de nuestros canales y ríos.

El turismo fluvial es un turismo que se realiza al aire libre, en la naturaleza, en el que se pueden realizar diversas actividades: pasear por los caminos colindantes, montar a caballo o en bicicleta, pesca... El turismo fluvial es también cultural y educativo ya que resulta fácil encontrar, durante la travesía, monumentos históricos de cada región (castillos, iglesias, abadías, etc.).

Hoy, el turismo fluvial es famoso en la gama de los productos turísticos porque une descanso a vacaciones activas al aire libre y convivencia. Las regiones, los departamentos y los municipios acondicionan las orillas, crean rutas y excursiones, y dan a conocer las riquezas a los turistas que navegan sobre sus canales, lagos y ríos.

El turismo fluvial se ha convertido en unas de las vacaciones más demandadas.

3.1.1.6.- CONSTRUCCIÓN FLUVIAL EN ESPAÑA

En España, la desigual configuración geográfica del suelo es el principal factor que ha condicionado el desarrollo de la navegación, fluvial y por canales, a pesar de los esfuerzos de romanos y musulmanes. Al tratarse de un país con relieve irregular, sus ríos cortos de escaso caudal y de corrientes variables no favorecen los proyectos que, a partir del reinado de los Reyes Católicos, van diseñándose.

Desde principios del siglo XVI se venía hablando en Castilla de proyectos de navegación fluvial. En 1509, en tiempos del rey Fernando el Católico, hubo un proyecto para hacer navegable el río Pisuegra. Unos años después, en 1548, los procuradores castellanos intentaron sin éxito que el príncipe regente Felipe, el futuro rey Felipe II, promoviese la construcción de algunos canales de riego para paliar las consecuencias de las terribles sequías que aquellos años azotaban la región. La partida del príncipe Felipe hacia Flandes y la llegada del nuevo regente, Maximiliano de Austria, hicieron cambiar sustancialmente la situación. En sus tres años de estancia en Valladolid, de 1448 a 1450, este gobernante centroeuropeo impulsó de manera sobresaliente los proyectos de navegación interior en Castilla.

Con la presencia de ingenieros extranjeros y la existencia de un grupo de españoles bien preparados, a mediados del siglo XVI se producirá en España un importante avance en tecnología e ingeniería hidráulica, que favorecerá de forma especial la elaboración de proyectos para la navegación interior. Tal es así, que en 1549 Bartolomé Bustamante de Herrera, arquitecto, ingeniero y visitador de obras reales, por encargo del regente Maximiliano, recorre la cuenca del río Pisuegra y las de sus principales afluentes con el objeto de estudiar las posibilidades que ofrecían estos ríos para el regadío y la navegación.

El dictamen del «*visitador de las obras reales*» fue desfavorable por lo accidentado del terreno y lo irregular de los caudales, proponiendo como alternativa la construcción de una red de canales de navegación que también podría servir para el riego.

El proyecto no se llevó a cabo y tuvieron que pasar casi 200 años hasta que, a mediados del siglo XVIII el Marqués de la Ensenada, dentro de la política encaminada a mejorar las comunicaciones del país, retoma la idea y la propone al rey Fernando VI.

Se inician entonces los trabajos de reconocimiento y nivelación en la cuenca del Duero, procediéndose a la elaboración de sucesivos proyectos encaminados a la ejecución de una red de canales que comuniquen Castilla la Vieja y León con el resto de España y del mundo.

3.1.1.6.1.- POLÍTICA HIDRÁULICA

Los siglos XVI y XVII son muy importantes a nivel de la política hidráulica debido, fundamentalmente, a la construcción de embalses para el riego en los Reinos de Valencia y Murcia. Aunque las reservas en ríos, ramblas y barrancos no terminan de solucionar los problemas de escasez de agua del sudeste peninsular.

Los orígenes de la planificación hidráulica en España surgen con los Borbones, en el siglo XVIII, los cuales juzgan imprescindible, la vertebración de la España peninsular, de cara a unificar su mercado agrícola, mediante un sistema de comunicaciones basado en la navegación interior. Desconocen e infravaloran los condicionamientos físicos del territorio, sobre todo su elevada altitud media y las serias dificultades de circulación inherentes del relieve. Así como la penuria veraniega de precipitaciones que padece la mayoría del territorio, provocando duros estiajes en su red hidrográfica.

Casi todos los grandes proyectos de esta época, ya sean de iniciativa privada o pública, supeditan el riego a la navegación.

Las grandes decisiones hidráulicas del reformismo ilustrado, llevan el sello del marqués de la Ensenada y del Conde de Floridablanca. Destaca este segundo personaje por su interés por el desarrollo del regadío.

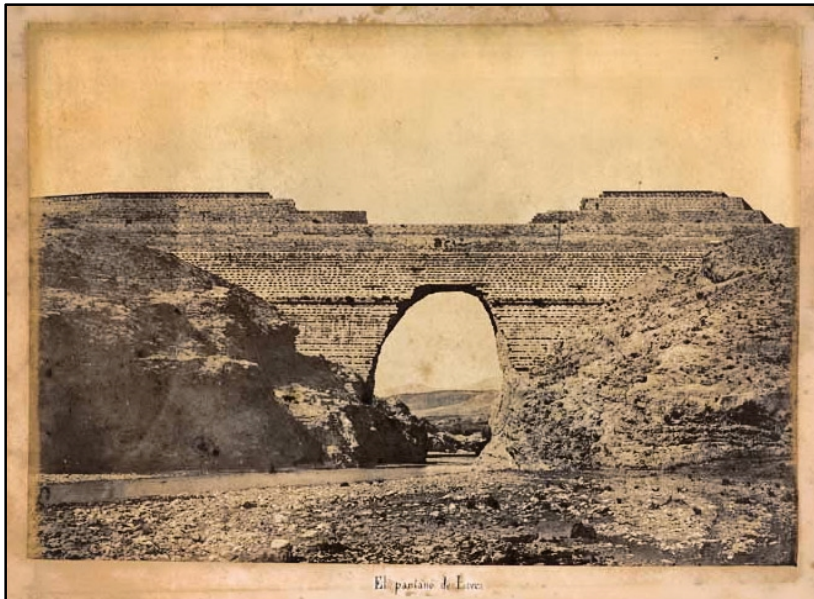
Este desarrollo de grandes obras tuvo grandes éxitos y muchos fracasos. Dentro de los primeros, destacamos los canales de Campos de Castilla, prolongación del Canal Imperial de Aragón, canal de Tauste, entre otros. Como fracasos más sonoros, están los canales de Murcia y de Guadarrama.



*Canal de Castilla en
Becerril*

Los inicios de la política hidráulica española, tienen como referencia el Proyecto General de los Canales de Navegación y Riego para los Reinos de Castilla y León de 1753.

A finales de abril de 1802, se produce la rotura del embalse de Puentes que causa el mayor desastre de la historia hidráulica española, con 608 muertos y daños calculados en unos 32.400.000 reales de vellón.



*Fotografía del
pantano de Puentes,
Lorca, años después
de su rotura.*

Hay una gran labor legislatora sobre planificación hidráulica durante la segunda mitad del siglo XIX, a partir de la creación, en 1865, de las Divisiones Hidrológicas. Organismos que conocen grandes altibajos hasta que, a principios del siglo XX, se convierten en las Divisiones de Trabajos Hidráulicos.

En 1879, se promulga la primera Ley de Aguas, que se queda rápidamente anticuada. Pero, gracias a ella, se elabora el Plan General de Canales de Riego y pantanos, de 1902, fecha en que también se crean las Confederaciones Sindicales Hidrográficas.

El plan es elaborado, en 1902, como respuesta del liberalismo político a la grave crisis agraria en que está inmerso el país en aquellos momentos históricos.

El plan opta por un planteamiento uniforme. Considera beneficioso cualquier regadío, y no utiliza como criterio de transformación del mismo, el coste económico por hectárea. Se puede decir, que este plan obtiene unos resultados poco satisfactorios, si miramos la gran inversión económica realizada.

Con la llegada de la dictadura de Primo de Rivera, en 1923, se modifica radicalmente la política hidráulica. Plantea la descentralización de sus actuaciones mediante organismos autónomos de nueva creación, como son las llamadas Confederaciones Sindicales Hidrográficas. Con esto, la política hidráulica española, adquiere un carácter decididamente regional.

Los logros de estas Confederaciones son muy desiguales. Podemos ver, por ejemplo, ríos como el Júcar, donde apenas hay actuaciones, en contraste con el éxito espectacular del Ebro, donde se transforman unas 100.000 hectáreas de regadío.

Dichas carencias se intentan paliar con el I Plan Nacional de Obras Hidráulicas de 1933, que antepone el interés nacional ante cualquier interés particular, ya sea privado o regional.

El I Plan Nacional de Obras Hidráulicas tiene como finalidad corregir dos problemas básicos: en primer lugar, solucionar los desequilibrios hídricos entre la vertiente atlántica y la mediterránea y en segundo lugar, subsanar el desequilibrio resultante del Plan de 1902, donde la cuenca mediterránea es marginada.

Para lograrlo, se idea el Plan de Mejora y Ampliación de los Riegos del Levante, que prevé la transformación de 338.000 ha en las provincias de Murcia, Valencia, Alicante, Almería, Albacete y Cuenca. Pero para la realización de dichos regadíos se necesita un volumen de agua de 2.300 hm³ anuales. Para ello se cuenta con los sobrantes de los ríos valencianos y murcianos, pero se requiere aguas de otras cuencas fundamentales de las cabeceras de los ríos Guadiana y sobre todo del Tajo.

Manuel Lorenzo Pardo - Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos - considera prioritario apoyar las comarcas agrícolas exportadoras, con lo que se reafirma su apuesta por la zona mediterránea. El trasvase Tajo-Segura es la principal obra a realizar para la corrección del desequilibrio hidrográfico que preconiza el I Plan Nacional de Obras Hidráulicas, pero éste no se hace realidad hasta 1979.

3.1.1.6.2.-TRASVASES

Las primeras solicitudes de trasvases documentadas en España tuvieron lugar a mitad del siglo XIV y corresponden a las regiones de Murcia y Almería, cuyos regímenes de lluvia siempre han sido escasos e irregulares.

Este territorio se encuentra en aquella época dividido entre la Corona de Castilla y Aragón y el reino nazarí de Granada. La ciudad de Lorca, llave del reino de Murcia, plantea a Enrique II la necesidad de traer agua para sus regadíos, provenientes de las fuentes de Archivel o Caravaca, que se encuentran a más de cincuenta kilómetros de distancia.

La villa de Elche decide gestionar un trasvase con las aguas perennes del río Júcar, en 1420, consiguiendo que Villena y Chinchilla, que se encuentran en territorio de Castilla, permitan pasar por sus territorios las conducciones de agua de este trasvase.

Pero ambos proyectos se ven frustrados debido tanto a las dificultades técnicas y económicas del momento como al tipo de terreno sobre el que construir: muy accidentado e irregular.

Todo esto, sumado al rechazo de los lugareños de donde se pretende extraer el agua ya que son conscientes de la riqueza que supone disponer de este bien, frustra los primeros planes de trasvases en el país e imposibilita su construcción.

Trasvase Tajo-Segura

La gran obra hidráulica del siglo XX en España es el trasvase Tajo-Segura. Es diseñado durante la dictadura del general Primo de Rivera. Se aprueba, en el año 1933, en tiempos de la Segunda República a propuesta del ministro de Fomento, el socialista Indalecio Prieto. Pero, debido a la guerra civil, no se realiza.

Es durante la dictadura del general Franco cuando se llevó a cabo dicho proyecto, siendo inaugurado en 1979.

El proyecto consiste en un canal de 286 km de longitud, con una capacidad de 33 m³ por segundo, que arranca del embalse de Bolarque, en el Tajo, aguas abajo de los de Entrepeñas y Buendía. Llega al de Alarcón sobre el río Júcar, y desde allí al embalse de Talave en el río Mundo, principal afluente del Segura.



Tuberías de elevación del trasvase Tajo-Segura desde Bolarque

Las aportaciones de este trasvase han posibilitado una agricultura en la zona murciana altamente productiva, pero no ha impedido el consumo por encima de los recursos hídricos disponibles, ni el agotamiento progresivo de embalses y aguas subterráneas de la región.

El trasvase Tajo-Segura afecta a siete comunidades: Aragón, Castilla la Mancha, Madrid, Extremadura, Valencia, Murcia y Andalucía.

Tiene como objetivo la transferencia de 1.000 hm³ anuales pero la realidad es que nunca se ha trasvasado tal cantidad de agua. Sirva como ejemplo que, en el año 1992, se trasvasó solamente 185 hm³ y en 1993, unos 115 hm³.

La experiencia de este trasvase sirve, tras un cuarto de siglo de funcionamiento, para no volver a cometer los mismos errores.

El trasvase Tajo-Segura pone de manifiesto que esta clase de operaciones generan más desequilibrios y conflictos que los que pretenden resolver, sobre todo, cuando hay alternativas posibles en las zonas que acusan déficit hídrico.

La cesión de recursos desde el Tajo no sólo no alivia la falta de agua de Murcia y el sur de Alicante, sino que sirve para agravar la situación, ya que se transforma un 40% más de hectáreas de tierra de las que se iban a utilizar para regadío inicialmente.



Tramo del trasvase Tajo-Segura

Esta extensión del regadío, que surge al margen de la ley, contribuye a aumentar el déficit de agua de la zona y a la sobreexplotación de los acuíferos.

Es de prever que si algún día se realiza el trasvase del Ebro, aumenten los problemas de agua en el Levante. Sirva como ejemplo, que la cuenca del Segura solicitó, en el verano de 2004, el doble del caudal previsto en el Plan Hidrológico Nacional ya que incluía el trasvase del Ebro.



Cámara de carga del túnel de Talave. Trasvase Tajo-Segura

3.1.2.- TIPOS DE CANALES

- **Canales naturales**

Se denomina canal natural a las depresiones naturales en la corteza terrestre. Algunos tienen poca profundidad y otros son más profundos, según se encuentren en la montaña o en la planicie.

Los canales naturales influyen todos los tipos de agua que existen de manera natural en la tierra, lo cuales varían en tamaño desde pequeños arroyuelos en zonas montañosas hasta quebradas, arroyos, ríos pequeños y grandes, y estuarios de mareas.

Las corrientes subterráneas que transportan agua con una superficie libre, también son consideradas como canales abiertos naturales.

Las propiedades hidráulicas de un canal natural por lo general son muy irregulares. En algunos casos pueden hacerse suposiciones empíricas razonablemente consistentes en las observaciones y experiencias reales, de tal modo que las condiciones de flujo en estos canales se vuelvan manejables mediante tratamiento analítico de la hidráulica teórica.

- **Canales de riego**

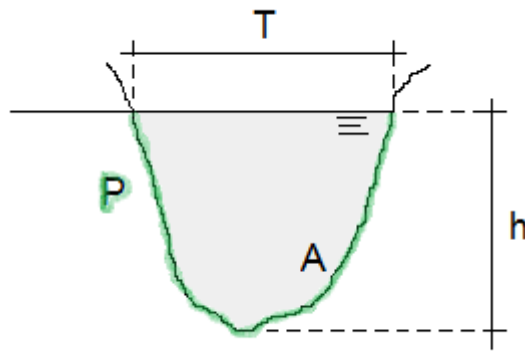
Son vías construidas para conducir el agua hacia las zonas que requieren complementar el agua que se ha precipitado, de forma natural, sobre el terreno.

- **Canales de navegación**

Un canal de navegación es una vía de agua, hecha por el hombre, que normalmente conecta lagos, ríos u océanos.

3.1.3.- ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA SECCIÓN DE UN CANAL

Los elementos geométricos son propiedades de una sección del canal que puede ser definida enteramente por la geometría de la sección y la profundidad del flujo. Estos elementos son muy importantes para los cálculos del escurrimiento.



- **Profundidad del flujo, calado o tirante:** la profundidad del flujo (**h**) es la distancia vertical del punto más bajo de la sección del canal a la superficie libre.
- **Ancho superior:** el ancho superior (**T**) es el ancho de la sección del canal en la superficie libre.
- **Área mojada:** el área mojada (**A**) es el área de la sección transversal del flujo normal a la dirección del flujo.
- **Perímetro mojado:** el perímetro mojado (**P**) es la longitud de la línea de la intersección de la superficie mojada del canal con la sección transversal normal a la dirección del flujo.
- **Radio hidráulico:** el radio hidráulico (**R**) es la relación entre el área mojada y el perímetro mojado, se expresa como:

$$R = \frac{A}{P}$$

- **Profundidad hidráulica:** la profundidad hidráulica (**D**) es la relación del área mojada con el ancho superior, se expresa como:

$$D = \frac{A}{T}$$


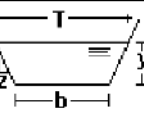
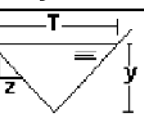

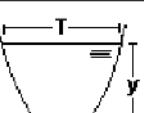
- Factor de la sección:** el factor de la sección (Z), para cálculos de escurrimiento o flujo crítico es el producto del área mojada con la raíz cuadrada de la profundidad hidráulica, se expresa como:

$$Z = A \sqrt{D}$$

El factor de la sección, para cálculos de escurrimiento uniforme es el producto del área mojada con la potencia $2/3$ del radio hidráulico, se expresa como:

$$Z = A \cdot R^{\frac{2}{3}}$$

En la siguiente tabla se resumen las secciones más utilizadas en canales, con las unidades del sistema internacional:

Tipo de sección	Área A (m ²)	Perímetro mojado P (m)	Radio hidráulico R_h (m)	Espejo de agua T (m)
 Rectangular	by	$b+2y$	$\frac{by}{b+2y}$	b
 Trapezoidal	$(b+zy)y$	$b+2y\sqrt{1+z^2}$	$\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}}$	$b+2zy$
 Triangular	zy^2	$2y\sqrt{1+z^2}$	$\frac{zy}{2\sqrt{1+z^2}}$	$2zy$
 Circular	$\frac{(\theta - \text{sen}\theta)D^2}{8}$	$\frac{\theta D}{2}$	$(1 - \frac{\text{sen}\theta}{\theta}) \frac{D}{4}$	$(\frac{\text{sen}\theta}{2}) D$ ó $2\sqrt{y(D-y)}$
 Parabólica	$\frac{2}{3} Ty$	$T + \frac{8y^2}{3T}$	$\frac{2T^2y}{3T+8y^2}$	$\frac{3A}{2y}$

3.1.4.- TIPOS DE FLUJO EN UN CANAL

- **Flujo permanente:** un flujo permanente es aquel en el que las propiedades fluidas permanecen constantes en el tiempo, aunque pueden no ser constantes en el espacio.

Las características del flujo, como son: Velocidad (**V**), Caudal (**Q**), y Calado (**h**), son independientes del tiempo, si bien pueden variar a lo largo del canal, siendo **x** la abscisa de una sección genérica, se tiene que:

$$V = f_v(x)$$

$$Q = f_q(x)$$

$$h = f_h(x)$$

- **Flujo transitorio o No permanente:** un flujo transitorio presenta cambios en sus características a lo largo del tiempo para el cual se analiza el comportamiento del canal. Las características del flujo son función del tiempo; en este caso se tiene que:

$$V = f_v(x, t)$$

$$Q = f_q(x, t)$$

$$h = f_h(x, t)$$

Las situaciones de transitoriedad se pueden dar tanto en el flujo subcrítico como en el supercrítico.

- **Flujo uniforme:** es el flujo que se da en un canal recto, con sección y pendiente constante, a una distancia considerable (20 a 30 veces la profundidad del agua en el canal) de un punto singular, es decir un punto donde hay una mudanza de sección transversal ya sea de forma o de rugosidad, un cambio de pendiente o una variación en el caudal. En el tramo considerado, se las funciones arriba mencionadas asumen la forma:

$$V = f_v(x) = cte$$

$$Q = f_q(x) = cte$$

$$h = f_h(x) = cte$$

- **Flujo gradualmente variado:** cuando la profundidad de flujo cambia a lo largo del canal. El flujo variado puede ser permanente o no permanente. Debido a que el flujo uniforme no permanente es poco frecuente, el término “flujo no permanente” se utilizará de aquí para adelante para designar exclusivamente el flujo variado no permanente. El flujo variado puede clasificarse además como rápidamente variado o gradualmente variado. El flujo es rápidamente variado si la profundidad del agua cambia de manera abrupta en distancias comparativamente cortas; de otro modo es gradualmente variado. Un flujo rápidamente variado también se conoce como fenómeno local; algunos ejemplos son el resalto hidráulico y la caída hidráulica.
- **Flujo Crítico :** cuando Froude vale uno o cuando la velocidad es igual que la raíz cuadrada de la gravedad por la profundidad.

El número de Froude es la relación que hay entre la velocidad media y la velocidad de la onda superficial:

$$F = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{g \cdot y}} \quad y: \text{calado}$$

Por lo tanto, para un flujo crítico:

$$v = c \quad v = \sqrt{g \cdot y} \quad F = \frac{v}{c} = 1$$

$$F = 1$$

- **Flujo subcrítico:** en el caso de flujo subcrítico, también denominado flujo lento, el nivel efectivo del agua en una sección determinada está condicionado al nivel de la sección aguas abajo.

$$F < 1$$

- **Flujo supercrítico:** en el caso de flujo supercrítico, también denominado flujo veloz, el nivel del agua efectivo en una sección determinada está condicionado a la condición de contorno situada aguas arriba.

$$F > 1$$

3.1.5.- PÉRDIDAS DE CARGA EN CANALES Y TUBERÍAS

La pérdida de carga que tiene lugar en una conducción, representa la pérdida de energía de un flujo hidráulico, a lo largo de la misma, por efecto del rozamiento. A continuación, se resumen las principales fórmulas empíricas empleadas en el cálculo de la pérdida de carga que tiene lugar en tuberías:

- **DARCY-WEISBACH**

Una de las fórmulas más exactas para cálculos hidráulicos es la de Darcy-Weisbach. Sin embargo, por su complejidad en el cálculo del coeficiente f de fricción, ha caído en desuso. Aun así, se puede utilizar para el cálculo de la pérdida de carga en tuberías de fundición.

La fórmula original es:

$$h = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

En función del caudal la expresión queda de la siguiente forma:

$$h = 0.0826 f \frac{Q^2}{D^5} L$$

donde:

h : pérdida de carga o de energía (m)

f : coeficiente de fricción (adimensional)

L : longitud de la tubería (m)

D : diámetro interno de la tubería (m)

v : velocidad media (m/s)

g : aceleración de la gravedad (m/s^2)

Q : caudal (m^3/s)

El coeficiente de fricción f es función del número de Reynolds Re y del coeficiente de rugosidad o rugosidad relativa de las paredes de la tubería ε_r :

$$f = f(Re, \varepsilon_r)$$

$$Re = D \cdot v \cdot \frac{\rho}{\mu}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{D}$$

Donde:

ρ : densidad del agua (kg/m^3)

μ : viscosidad dinámica del agua ($N \cdot s/m^2$)

ε : rugosidad absoluta de la tubería (m)

En la siguiente tabla se muestran las propiedades físicas del agua en función de la temperatura:

PROPIEDADES FÍSICAS DEL AGUA							
Temperatura (°C)	Peso específico (kN/m³)	Densidad (kg/m³)	Módulo de elasticidad (kN/m²)	Viscosidad dinámica (N·s/m²)	Viscosidad cinemática (m²/s)	Tensión superficial (N/m)	Presión de vapor (kN/m²)
0	9,805	999,8	$1,98 \cdot 10^6$	$1,781 \cdot 10^{-3}$	$1,785 \cdot 10^{-6}$	0,0765	0,61
5	9,807	1000,0	$2,05 \cdot 10^6$	$1,518 \cdot 10^{-3}$	$1,519 \cdot 10^{-6}$	0,0749	0,87
10	9,804	999,7	$2,10 \cdot 10^6$	$1,307 \cdot 10^{-3}$	$1,306 \cdot 10^{-6}$	0,0742	1,23
15	9,798	999,1	$2,15 \cdot 10^6$	$1,139 \cdot 10^{-3}$	$1,139 \cdot 10^{-6}$	0,0735	1,70
20	9,789	998,2	$2,17 \cdot 10^6$	$1,102 \cdot 10^{-3}$	$1,003 \cdot 10^{-6}$	0,0728	2,34
25	9,777	997,0	$2,22 \cdot 10^6$	$0,890 \cdot 10^{-3}$	$0,893 \cdot 10^{-6}$	0,0720	3,17
30	9,764	995,7	$2,25 \cdot 10^6$	$0,708 \cdot 10^{-3}$	$0,800 \cdot 10^{-6}$	0,0712	4,24
40	9,730	992,2	$2,28 \cdot 10^6$	$0,653 \cdot 10^{-3}$	$0,658 \cdot 10^{-6}$	0,0696	7,38
50	9,689	988,0	$2,29 \cdot 10^6$	$0,547 \cdot 10^{-3}$	$0,553 \cdot 10^{-6}$	0,0679	12,33
60	9,642	983,2	$2,28 \cdot 10^6$	$0,466 \cdot 10^{-3}$	$0,474 \cdot 10^{-6}$	0,0662	19,92
70	9,589	977,8	$2,25 \cdot 10^6$	$0,404 \cdot 10^{-3}$	$0,413 \cdot 10^{-6}$	0,0644	31,16
80	9,530	971,8	$2,20 \cdot 10^6$	$0,354 \cdot 10^{-3}$	$0,364 \cdot 10^{-6}$	0,0626	47,34
90	9,466	965,3	$2,14 \cdot 10^6$	$0,315 \cdot 10^{-3}$	$0,326 \cdot 10^{-6}$	0,0608	70,10
100	9,399	958,4	$2,07 \cdot 10^6$	$0,282 \cdot 10^{-3}$	$0,294 \cdot 10^{-6}$	0,0589	101,33

En la siguiente tabla se muestran algunos valores de rugosidad absoluta para distintos materiales:

RUGOSIDAD ABSOLUTA DE MATERIALES						
Material		ϵ (mm)		Material		ϵ (mm)
Plástico (PE, PVC)		0,0015		Fundición asfaltada		0,06-0,18
Poliéster reforzado con fibra de vidrio		0,01		Fundición		0,12-0,60
Tubos estirados de acero		0,0024		Acero comercial y soldado		0,03-0,09
Tubos de latón o cobre		0,0015		Hierro forjado		0,03-0,09
Fundición revestida de cemento		0,0024		Hierro galvanizado		0,06-0,24
Fundición con revestimiento bituminoso		0,0024		Madera		0,18-0,90
Fundición centrifugada		0,003		Hormigón		0,3-3,0

Para el cálculo de f existen múltiples ecuaciones. A continuación se exponen las más importantes para el cálculo de tuberías:

- a. BLASIUS: Propone una expresión en la que f viene dado en función del Reynolds, válida para tubos lisos, en los que ϵ_r no afecta al flujo al tapar la subcapa laminar las irregularidades. Válida hasta $Re < 100000$

$$f = 0.3164 \cdot Re^{-0.25}$$

- b. PRANDTL Y VON-KARMAN: Amplían el rango de validez de la fórmula de Blasius para tubos lisos

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$$

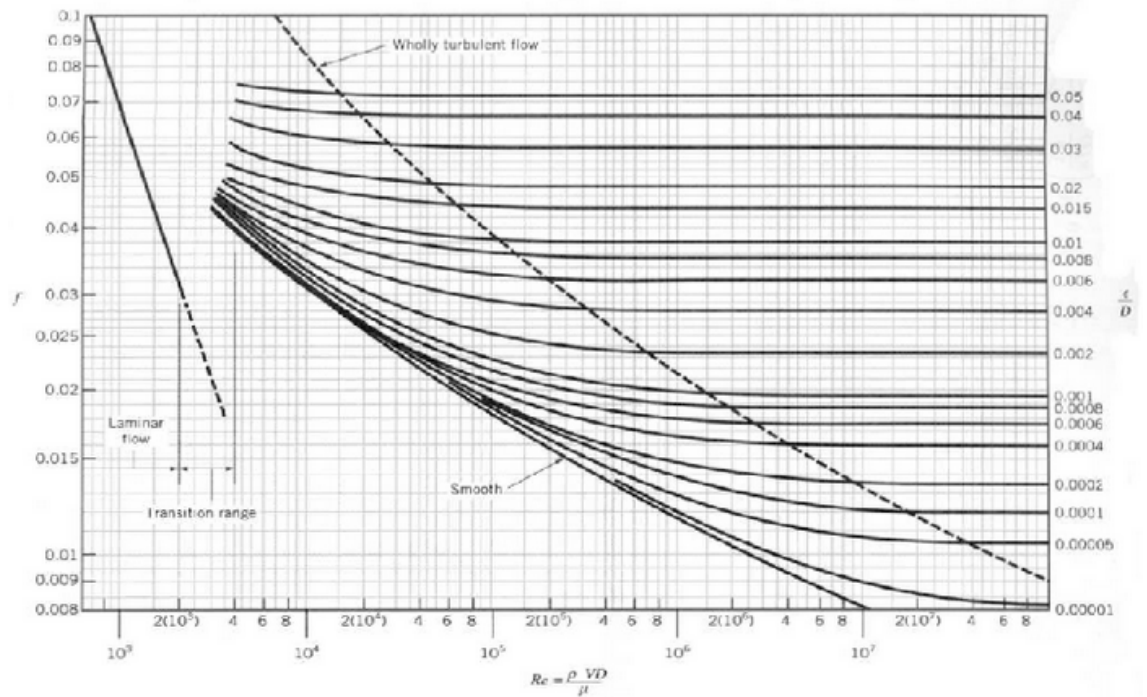
- c. NIKURADSE: propone una ecuación válida para tuberías rugosas:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3.71 \cdot D} \right)$$

- d. COLEBROOK-WHITE: agrupan las dos expresiones anteriores en una sola, que es además válida para todo tipo de flujos y rugosidades. Es la más exacta y universal, pero el problema radica en su complejidad y en que requiere de iteraciones:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[\left(\frac{\varepsilon}{3.71 \cdot D} \right) + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right]$$

- e. MOODY: consiguió representar la expresión de Colebrook-White en un ábaco de fácil manejo para calcular f en función del número de Reynolds (Re) y actuando la rugosidad relativa ε_r como parámetro diferenciador de las curvas:



▪ MANNING

Las ecuaciones de Manning se suelen utilizar en canales. Para el caso de las tuberías son válidas cuando el canal es circular y está parcial o totalmente lleno, o cuando el diámetro de la tubería es muy grande.

Uno de los inconvenientes de la fórmula es que sólo tiene en cuenta un coeficiente de rugosidad n obtenido empíricamente, y no las variaciones de viscosidad con la temperatura. La expresión es la siguiente:

$$h = \frac{10.3 \cdot n^2}{D^{5.33}} \cdot Q^2 \cdot L$$

Donde:

h : pérdida de carga o de energía (m)

n : coeficiente de rugosidad (adimensional)

D : diámetro interno de la tubería (m)

Q : caudal (m^3/s)

L : longitud de la tubería (m)

El cálculo del coeficiente de rugosidad n es complejo, ya que no existe un método exacto. Para el caso de tuberías se pueden consultar los valores de n en tablas publicadas. Algunos de esos valores se resumen en la siguiente tabla:

COEFICIENTE DE RUGOSIDAD DE MANNING DE MATERIALES				
Material	n		Material	n
Plástico (PE, PVC)	0,006-0,010		Fundición	0,012-0,015
Poliéster reforzado con fibra de vidrio	0,009		Hormigón	0,012-0,017
Acero	0,010-0,011		Hormigón revestido con gunita	0,016-0,022
Hierro galvanizado	0,015-0,017		Revestimiento bituminoso	0,013-0,016

- **HAZEN-WILLIAMS**

El método de Hazen-Williams es válido solamente para el agua que fluye en las temperaturas ordinarias (5 °C - 25 °C). La fórmula es sencilla y su cálculo es simple debido a que el coeficiente de rugosidad C no está en función de la velocidad ni del diámetro de la tubería.

Es útil en el cálculo de pérdidas de carga en tuberías para redes de distribución de diversos materiales, especialmente de fundición y acero.

- **SCIMENI**

Se emplea para tuberías de fibrocemento.

- **SCOBAY**

Se emplea, fundamentalmente, en tuberías de aluminio en flujos en la zona de transición a régimen turbulento. En el cálculo de tuberías en riegos por aspersión hay que tener en cuenta que la fórmula incluye también las pérdidas accidentales o singulares que se producen por acoples y derivaciones propias de los ramales, es decir, proporciona las pérdidas de carga totales.

- **PÉRDIDAS DE CARGA EN SINGULARIDADES**

Además de las pérdidas de carga por rozamiento, se producen otro tipo de pérdidas que se originan en puntos singulares de las tuberías (cambios de dirección, codos, juntas...) y que se deben a fenómenos de turbulencia. La suma de estas pérdidas de carga accidentales o localizadas más las pérdidas por rozamiento dan las pérdidas de carga totales.

Salvo casos excepcionales, las pérdidas de carga localizadas sólo se pueden determinar de forma experimental, y puesto que son debidas a una disipación de energía motivada por las turbulencias, pueden expresarse en función de la altura cinética corregida mediante un coeficiente empírico K :

$$h = K \frac{v^2}{2g}$$

Donde:

h : pérdida de carga o de energía (m)

K : coeficiente empírico (adimensional)

v : velocidad media del flujo (m/s)

El coeficiente K depende del tipo de singularidad y de la velocidad media en el interior de la tubería.

En la siguiente tabla se resumen los valores aproximados de K para cálculos rápidos:

VALORES DEL COEFICIENTE K EN PÉRDIDAS SINGULARES		
Accidente	K	L/D
Válvula esférica (totalmente abierta)	10	350
Válvula en ángulo recto (totalmente abierta)	5	175
Válvula de seguridad (totalmente abierta)	2,5	-
Válvula de retención (totalmente abierta)	2	135
Válvula de compuerta (totalmente abierta)	0,2	13
Válvula de compuerta (abierta 3/4)	1,15	35
Válvula de compuerta (abierta 1/2)	5,6	160
Válvula de compuerta (abierta 1/4)	24	900
Válvula de mariposa (totalmente abierta)	-	40
T por salida lateral	1,80	67
Codo a 90° de radio corto (con bridas)	0,90	32
Codo a 90° de radio normal (con bridas)	0,75	27
Codo a 90° de radio grande (con bridas)	0,60	20
Codo a 45° de radio corto (con bridas)	0,45	-
Codo a 45° de radio normal (con bridas)	0,40	-
Codo a 45° de radio grande (con bridas)	0,35	-

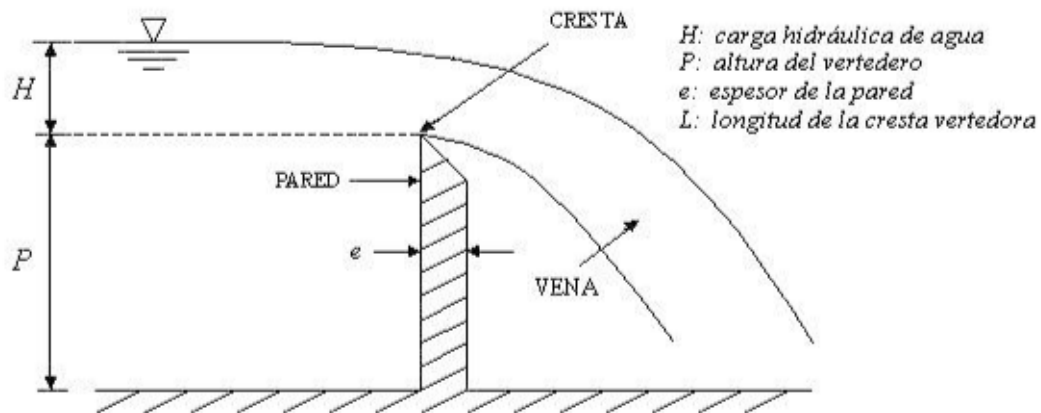
3.2.-VERTEDEROS

Se llama vertedero a la estructura hidráulica sobre la cual se efectúa una descarga a superficie libre.

Los vertederos son estructuras que tienen aplicación muy extendida en todo tipo de sistemas hidráulicos y expresan una condición especial de movimiento no uniforme en un tramo con notoria diferencia de nivel. Normalmente desempeñan funciones de seguridad y control.

El vertedero puede tener diversas formas según las finalidades a las que se destine. Si la descarga se efectúa sobre una placa con perfil de cualquier forma pero de arista aguda, el vertedero se llama de pared delgada; cuando la descarga se realiza sobre una superficie, el vertedero se denomina de pared gruesa. Ambos tipos pueden utilizarse como dispositivos de aforo en el laboratorio o en canales de pequeñas dimensiones.

El vertedero de pared gruesa se emplea, además, como obra de control o de excedencias en una presa y como aforador en grandes canales.



Elementos de un vertedero. Vvertedero de cresta delgada

3.2.1.- FUNCIONES DEL VERTEDERO

Las principales funciones del vertedero son:

- Lograr que el nivel de agua en una obra de toma alcance el nivel de requerido para el funcionamiento de la obra de conducción.
- Mantener un nivel casi constante aguas arriba de una obra de toma, permitiendo que el flujo sobre el coronamiento del vertedero se desarrolle con una lámina líquida de espesor limitado.
- En una obra de toma, el vertedero se constituye en el órgano de seguridad de mayor importancia, evacuando las aguas en exceso generadas durante los eventos de máximas crecidas.
- Permitir el control del flujo en estructuras de caída, disipadores de energía, transiciones, estructuras de entrada y salida en alcantarillas de carreteras, sistemas de alcantarillado, etc.

3.2.2.- CLASIFICACIÓN DE LOS VERTEDEROS

La clasificación de los vertederos puede realizarse en función de diversos factores.

Por su localización en relación a la estructura principal:

- Vvertederos frontales
- Vvertederos laterales
- Vvertederos tulipa; este tipo de vertedero se sitúa fuera de la presa y la descarga puede estar fuera del cauce aguas abajo

Desde el punto de vista de los instrumentos para el control del caudal vertido:

- Vvertederos libres, sin control.
- Vvertederos controlados por compuertas.

Desde el punto de vista de la pared donde se produce el vertimiento:

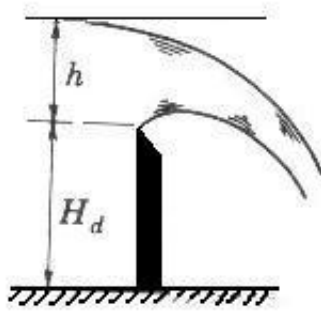
- Vvertedero de pared delgada
- Vvertedero de pared gruesa
- Vvertedero con perfil hidráulico

Desde el punto de vista de la sección por la cual se da el vertimiento:

- Rectangulares
- Triangulares
- Trapezoidales
- Circulares
- Lineales, en estos el caudal vertido es una función lineal del tirante de agua sobre la cresta.

3.2.2.1.- CLASIFICACIÓN SEGÚN SU FORMA GEOMÉTRICA

3.2.2.1.1.- VERTEDERO RECTANGULAR



La fórmula fundamental de caudal vertido en vertederos de sección rectangular, sin contracción, también conocido como vertedero de Bazin, es:

$$Q = C_d \frac{2}{3} \sqrt{2gL} \left[\left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{2/3} - \left(\frac{v_0^2}{2g} \right)^{2/3} \right]^*$$

Donde:

Q : caudal en m^3/s

C_d : es un coeficiente indicador de las condiciones de escurrimiento del agua sobre el vertedero

L : longitud de la solera del vertedero en m

h : altura de la lámina vertiente sobre la cresta en m

g : aceleración de la gravedad, en m/s^2

v_0 : velocidad de llegada de la corriente inmediatamente aguas arriba del vertedero, en m/s

*Si el vertimiento fuera de lámina contraída, se debe hacer una corrección, sustrayendo $0.1 h$ del valor de L por cada contracción.

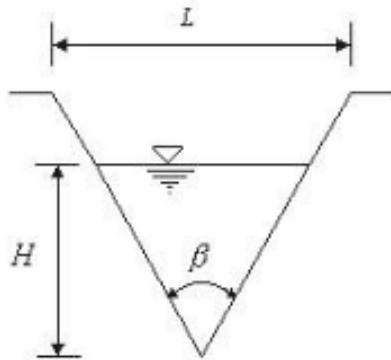
Cuando la velocidad de aproximación es baja se puede simplificar la ecuación de la siguiente forma:

$$Q = C_d \cdot L \cdot h^{3/2}$$

El valor de C_d puede definirse en función de los valores de H_d y h , siendo H_d la altura del vertedero en m, mediante la siguiente tabla:

	0.05	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.50	h
0.5	2.316	2.285	2.272	2.266	2.263	2.262	2.262	2.261	
1.0	2.082	2.051	2.037	2.030	2.027	2.026	2.025	2.024	
2.0	1.964	1.933	1.919	1.912	1.909	1.908	1.907	1.906	
10	1.870	1.839	1.824	1.817	1.815	1.814	1.812	1.812	
	1.846	1.815	1.801	1.793	1.791	1.790	1.789	1.788	
H_d/h									

3.2.2.1.2.- VERTEDERO TRIANGULAR

Valores característicos de C_d

ÁNGULO β	C_d
15°	0.52-0.75
30°	0.59-0.72
45°	0.59-0.69
60°	0.50-0.54
90°	0.50-0.60

Cuando los caudales son pequeños (menos de 6 litros por segundo), es conveniente aforar usando vertederos en forma de V debido a que, como la presión varía con la altura, se produce un gran gradiente de velocidad entre la parte inferior del triángulo y la superior. Produciéndose una variación en la lectura de la carga hidráulica H más representativa.

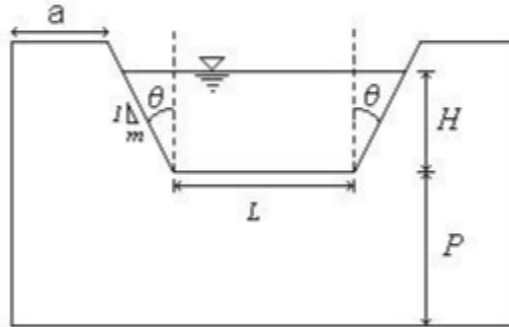
$$Q = \frac{8}{15} C_d \sqrt{2g} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) H^{5/2}$$

$$\text{Si } \beta = 90^\circ \quad Q = 1.4 H^{5/2}, \text{ en sistema M.K.S } ^*$$

* **Sistema MKS:** sistema de unidades que toma su nombre de las unidades que adopta como básicas: el metro, el kilogramo y el segundo como unidades de longitud, masa y tiempo respectivamente.

3.2.2.1.3.- VERTEDERO TRAPEZOIDAL

Este vertedero ha sido diseñado con el fin de disminuir el efecto de las contracciones que se presentan en un vertedero rectangular contraído.



$$Q = \frac{2}{3} C_{d1} \cdot \sqrt{2g} \cdot L \cdot H^{3/2} + \frac{8}{15} C_{d2} \sqrt{2g} \cdot H^{5/2} \cdot \operatorname{tg} \theta$$

C_{d1} : Coeficiente de descarga para el vertedero rectangular con contracciones.

C_{d2} : Coeficiente de descarga para el vertedero triangular.

L : Longitud de la cresta.

θ : ángulo de inclinación de los lados respecto a la vertical.

m : inclinación lateral

La ecuación anterior puede transformarse en:

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \left[C_{d1} + \frac{4}{5} \cdot \frac{H}{L} C_{d2} \cdot \operatorname{tg} \theta \right] \cdot L H^{3/2}$$

Cuando la inclinación de los taludes laterales es de 4V:1H, el vertedero recibe el nombre de Cipolletti en honor a su inventor. La geometría de este vertedero ha sido obtenida de manera que las ampliaciones laterales compensen el caudal disminuido por las contracciones de un vertedero rectangular con iguales longitud de cresta y carga de agua.

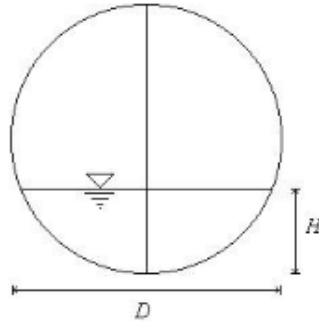
Sotelo afirma que el término entre paréntesis de la ecuación es de 0.63 lo que conduce a la siguiente ecuación, en sistema M.K.S:

$$Q = 1.861 LH^{3/2}$$

Esta ecuación es válida si

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.08m \leq a \leq 0.60m \\ L \geq 2H \\ P \geq 3H \end{array} \right.$$

3.2.2.1.4.- VERTEDERO CIRCULAR



$$Q = \phi \left[0.555 + \frac{D}{110H} + 0.041 \frac{H}{D} \right] D^{5/2}$$

H : carga hidráulica o altura de carga, expresada en decímetros.

D : diámetro [dm].

Q : caudal [l/s].

ϕ : depende de la relación H/D dada por la siguiente tabla.

Esta ecuación es válida si:

$$\left. \begin{array}{l} 0.20m < D < 0.30m \\ 0.075 < \frac{H}{D} < 1 \end{array} \right\}$$

La ecuación típica, planteada por Azevedo y Acosta es:

$$Q = 1.518 D^{0.0693} H^{1.807}, \text{ en sistema M.K.S.}$$

<i>H/D</i>	<i>ϕ</i>	<i>H/D</i>	<i>ϕ</i>
0.05	0.0272	0.55	2.8205
0.10	0.1072	0.60	3.2939
0.15	0.2380	0.65	3.7900
0.20	0.4173	0.70	4.3047
0.25	0.6428	0.75	4.8336
0.30	0.9119	0.80	5.3718
0.35	1.2223	0.85	5.9133
0.40	1.5713	0.90	6.4511
0.45	1.9559	0.95	6.9756
0.50	2.3734	1.00	7.4705

Valores característicos de ϕ para vertederos circulares

3.2.2.2.- CLASIFICACIÓN SEGÚN LA PARED DE VERTIDO

3.2.2.2.1.- VERTEDERO DE PARED DELGADA

Los vertederos de pared delgada se usan, generalmente, para medir caudales. Para obtener resultados fiables en la medición con el vertedero de pared delgada es importante que:

- la pared de aguas arriba sea vertical
- esté colocado perpendicular a la dirección de corriente
- la cresta del vertedero sea horizontal o, en el caso de que esta sea triangular, la bisectriz del ángulo esté vertical.

Además, debe cuidarse de mantener la presión atmosférica debajo de la lámina vertida; el canal aguas arriba debe ser recto y estar desobstruido.

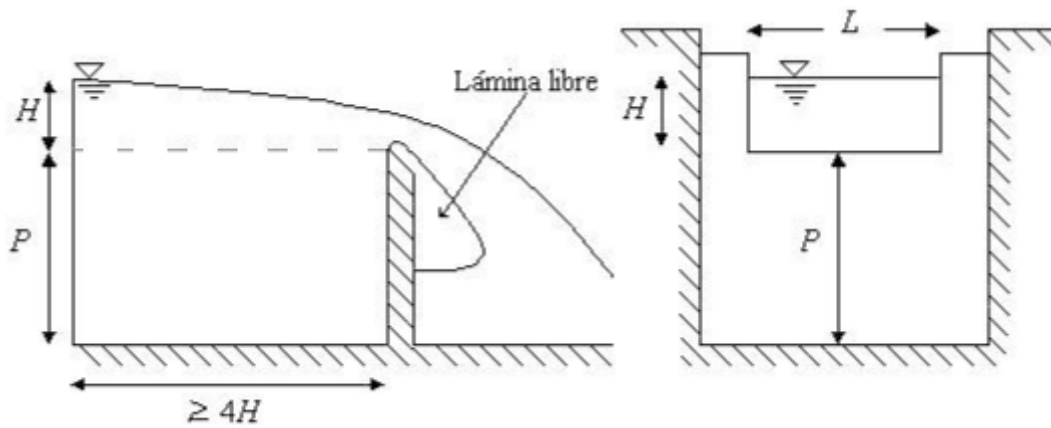
La carga h , sobre la cresta del vertedero debe ser medida a una distancia suficiente, aguas arriba, para no tener influencia de la curvatura de la superficie líquida en la proximidad del vertedero.

Para mantener la presión del aire, y evitar que este se vea succionado, acercando la lámina de agua al aliviadero, se instalan sistemas e aireación (generalmente tubos a los lados por donde entra el aire).



Vertedero de pared delgada en Dobbs cerca de Hoddesdon, Inglaterra.

El vertedero de pared delgada es el más usado, especialmente como aforador, por ser una estructura de fácil construcción e instalación. Debidamente calibrados o patronados, se obtienen ecuaciones o curvas en las cuales el caudal se encuentra en función de la carga hidráulica H .

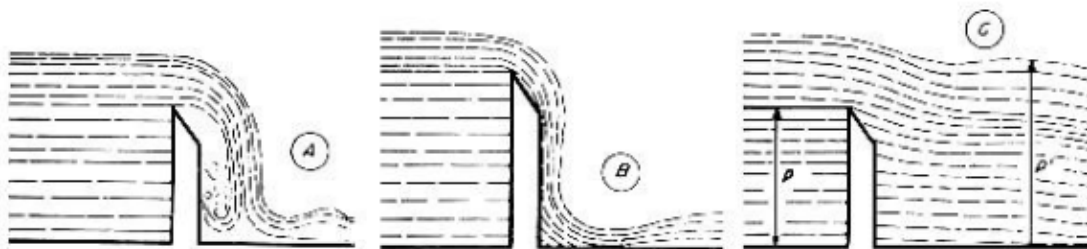


La ecuación de patronamiento típica es la denominada *Fórmula de Francis*:

$$Q = 1.84LH^{3/2}, \text{ sistema M.K.S.}$$

El funcionamiento de los vertederos de pared delgada puede variar según la forma de la vena o chorro aguas abajo de la estructura, en situaciones en que no toda la lámina esté en contacto con la presión atmosférica, modificándose la posición de la vena y alterándose el caudal. Es por ello que cuando el vertedero es usado para medición de caudales se debe evitar la situación anterior.

Esta influencia se puede presentar en vertederos sin contracción lateral que no dispongan de una adecuada aireación. En estas circunstancias la lámina líquida puede tomar una de las formas siguientes:



A.- LÁMINA DEPRIMIDA: el aire es arrastrado por el agua, ocurriendo un vacío parcial aguas abajo de la estructura, que modifica la posición de la vena, el caudal es mayor al previsto teóricamente.

B.- LÁMINA ADHERENTE: ocurre cuando el aire sale totalmente. En esta situación el caudal también es mayor.

C.- LÁMINA AHOGADA: cuando el nivel de aguas abajo es superior al de la cresta $P' > P$. Los caudales disminuyen a medida que aumenta la sumersión. En esta situación el caudal se puede calcular, teniendo como base los valores relativos a la descarga de los vertederos libres aplicándoles un coeficiente de reducción estimado con datos del U. S. of Board Waterway presentada por Azevedo y Acosta.

h/H	Coeficiente	h/H	Coeficiente
0.0	1.000	0.5	0.937
0.1	0.991	0.6	0.907
0.2	0.983	0.7	0.856
0.3	0.972	0.8	0.778
0.4	0.956	0.9	0.621

Coeficiente de descarga para vertederos delgados con funcionamiento ahogado.

Siendo h la altura de agua por encima de la cresta, medida aguas abajo;
 $h = P' - P$ y H la carga hidráulica.

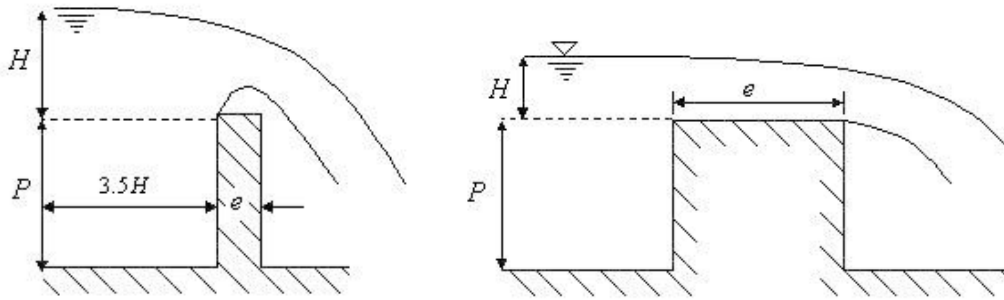
También podemos utilizar la siguiente expresión:

$$\frac{Q_{ahogado}}{Q_{veretdero}} = \left(1 - \left(\frac{h}{H} \right)^{1.84} \right)^{0.385}$$

3.2.2.2.- VERTEDERO DE PARED ANCHA

Los vertederos de pared ancha tienen menor capacidad de descarga para igual carga de agua que los vertederos de pared delgada y su uso más frecuente es como estructuras de control de nivel.

La mínima distancia a la cual se debe instalar los medidores de la carga hidráulica H para que no esté afectada por la declinación de la lámina de agua es $3.5H$, como se observa en la siguiente figura:



Vertedero de pared delgada

Vertedero de pared gruesa

Sotelo presenta la siguiente clasificación del funcionamiento de los vertederos, según la relación e/H :

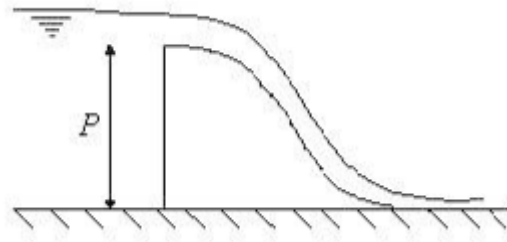
- Cuando e/H es menor que 0.67 el chorro se separa de la cresta y el funcionamiento es idéntico al del vertedero de pared delgada.
- Cuando e/H es mayor a 0.67 el funcionamiento es diferente, pues la lámina vertiente se adhiere a la cresta del vertedero.
- Si la relación e/H es mayor que 10 se considera que el funcionamiento es en canal.

La ecuación de patronamiento típica es:

$$Q = 1.71 \cdot LH^{3/2}, \text{ en sistema M.K.S.}$$

3.2.2.2.3.- VERTEDERO CON PERFIL CREAGER

Se usa para evacuar caudales de creciente, pues la forma especial de su cresta permite la máxima descarga al compararlo con otra forma de vertedores para igual altura de carga de agua.



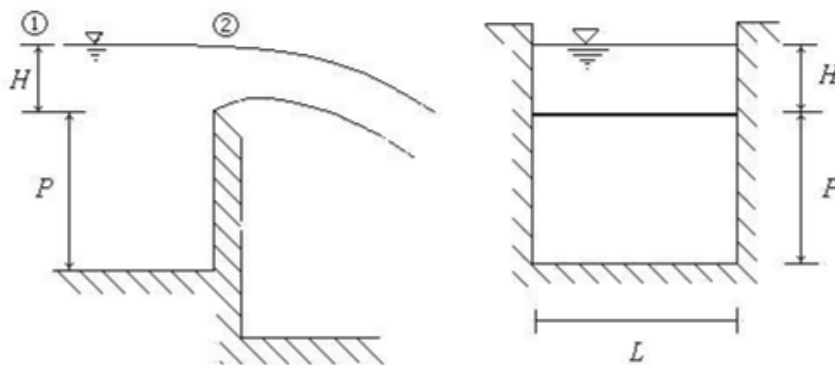
La ecuación de patronamiento típica es:

$$Q = 2.2 \cdot LH^{3/2}, \text{ en el sistema M.K.S.}$$

3.2.2.3.- CLASIFICACIÓN SEGÚN LA FORMA GEOMÉTRICA Y LA PARED DE VERTIDO

Encontramos una serie de vertederos que cumplen las dos clasificaciones anteriores de forma simultánea. Veamos los dos casos más comunes.

3.2.2.3.1.- VERTEDEROS RECTANGULARES DE PARED DELGADA SIN CONTRACCIONES



Aplicando la ecuación de energía entre los puntos 1 y 2, se obtiene una expresión para el caudal:

$$Q_T = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \cdot L \left(H + \frac{v^2}{2g} \right)^{3/2}$$

Donde:

Q_T : caudal teórico

L : longitud del vertedero

P : altura del vertedero

H : carga hidráulica sobre la cresta

v : velocidad de llegada al vertedor

g : aceleración debida a la fuerza de la gravedad

La ecuación no considera las pérdidas por fricción en el tramo, ni los efectos de tensión superficial, por lo tanto el caudal real es menor que el caudal teórico, por tal razón se introduce un coeficiente que permita incluir estas consideraciones, como se indica a continuación:

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \cdot C_d \cdot L \left(H + \frac{v^2}{2g} \right)^{3/2}$$

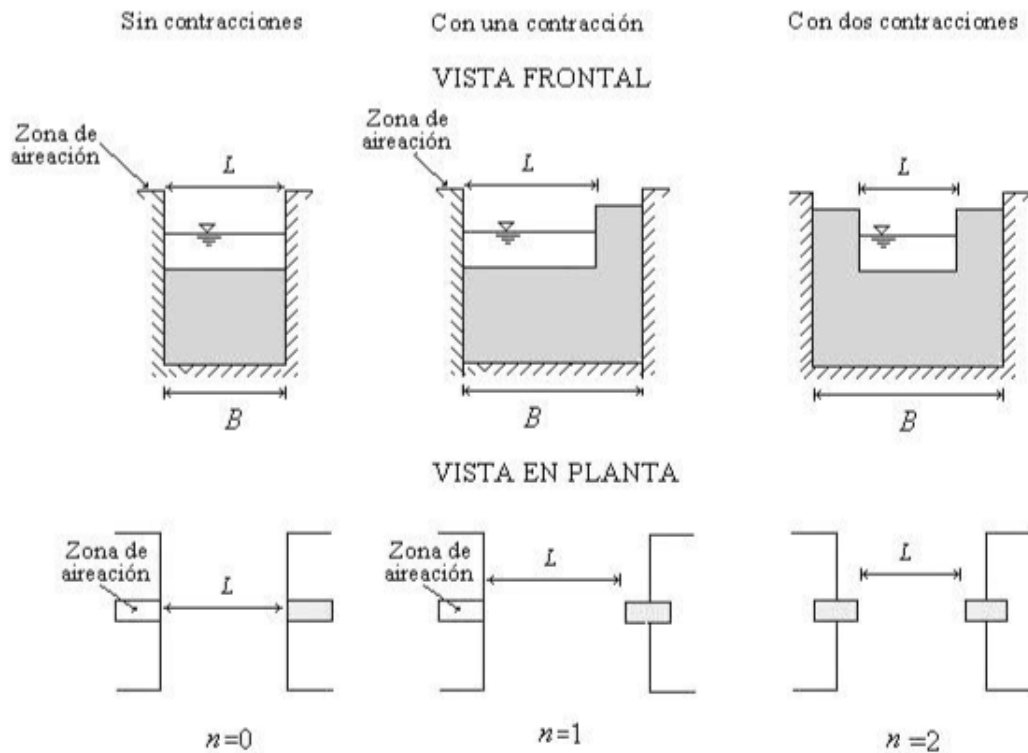
Siendo C_d el coeficiente de descarga, cuyos valores característicos deben estar entre 0.55 y 0.65.

Despreciando la influencia de la velocidad de llegada al vertedor, la ecuación se simplifica de la siguiente forma:

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \cdot C_d L H^{3/2}$$

Sotelo presenta ecuaciones que permiten calcular los coeficientes de descarga para vertederos rectangulares con contracciones o sin ellas y también para vertederos triangulares.

3.2.2.3.2.- VERTEDEROS RECTANGULARES DE PARED DELGADA CON CONTRACCIONES



En la figura anterior se presenta un esquema con las diferentes posibilidades de un vertedero rectangular, con o sin contracciones.

Para esta situación, la longitud efectiva del vertedero es L' .

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \cdot C_d L' H^{3/2}$$

El efecto de la contracción se tiene en cuenta restando a la longitud total de la cresta del vertedero L , el número de contracciones multiplicada por $0.1H$:

$$L' = L - 0.1 \cdot n \cdot H$$

L' : longitud contraída de la lámina de agua en el vertedero.

L : longitud real del vertedero.

n : número de contracciones laterales.

Reemplazando esta ecuación en la anterior se obtiene:

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \cdot C_d (L - 0.1 \cdot n \cdot H) H^{3/2}$$

Para el caso del vertedero sin contracciones laterales ($n=0$), se requiere de una zona de aireación en los extremos de la estructura que permita el ingreso de aire y así para garantizar que la presión aguas abajo de la estructura sea la atmosférica, como podemos ver en la figura anterior.

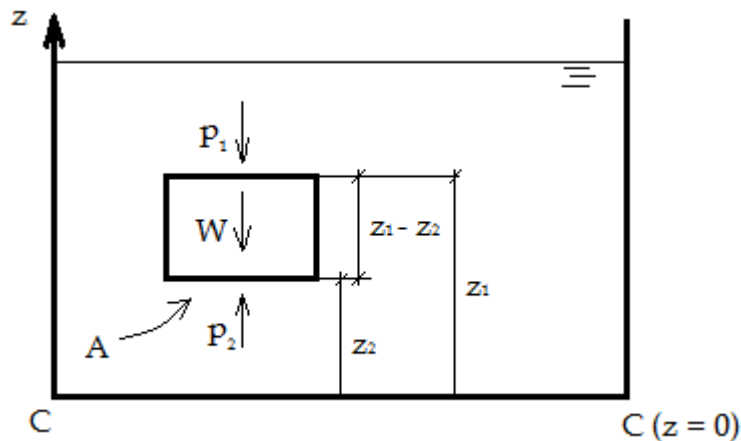
3.2.3.- REQUISITOS GENERALES DE INSTALACIÓN DE VERTEDEROS

- El vertedero deberá ubicarse en canales de sección uniforme y alineamiento recto aguas arriba, en una longitud mayor de $20H$.
- El vertedero debe instalarse normalmente al flujo y la cresta debe estar perfectamente lisa y nivelada.
- La lectura de la carga H sobre la cresta se mide con una regla graduada o limnómetro ubicado por lo menos a una distancia 3.5 veces la carga máxima hacia aguas arriba.
- Para asegurar su funcionamiento con descarga libre, debe instalarse un dispositivo de ventilación que comunique la cara aguas abajo del vertedero con la atmósfera.
- Si la instalación del vertedero es permanente, debe dejarse un dispositivo de drenaje para evacuar los sedimentos depositados.
- Se recomienda que la cresta sea de material resistente a la corrosión como bronce, acero, plástico y con la arista viva.

3.3.- FUNDAMENTOS HIDRÁULICOS

3.3.1.- HIDROSTÁTICA

Consideremos un recipiente que contenga un líquido homogéneo ($\gamma = cte$) y en reposo, en cuya base estableceremos un plano horizontal de comparación o referencia (CC) desde el que mediremos las alturas en el eje z . Escojamos como representativo de todo el líquido un prisma diferencial rectangular de peso W , base A y altura $z_1 - z_2$.



Al estar el fluido en reposo, las fuerzas que actúan sobre el prisma en cualquier dirección, han de estar en equilibrio. Efectivamente, las fuerzas debidas a la presión sobre la superficie lateral son horizontales y no dan componente vertical, por lo que no las consideramos.

Sin embargo, en la dirección del eje z :

$$p_1 \cdot A + W = p_2 \cdot A$$

Y como $W = vol \cdot \gamma = A(z_1 - z_2) \cdot \gamma$, resulta:

$$p_1 \cdot A + A(z_1 - z_2) \cdot \gamma = p_2 \cdot A$$

De donde, la **ecuación fundamental de la hidrostática** queda así:

$$p_2 - p_1 = \gamma(z_1 - z_2)$$

Ecuación fundamental de la hidrostática: la diferencia de presión entre dos puntos cualesquiera de una masa líquida, homogénea y en reposo, es igual al peso de la columna de líquido, de base unidad, y altura la diferencia de cotas entre los dos puntos.

Altura o nivel piezométrico: en una masa líquida, homogénea y en reposo, se llama *altura o nivel piezométrico*, a la suma de la altura representativa de la presión, p/γ , más la representativa de la cota, z , sobre un mismo plano de comparación; la cual es constante.

$$\frac{p}{\gamma} + z = cte$$

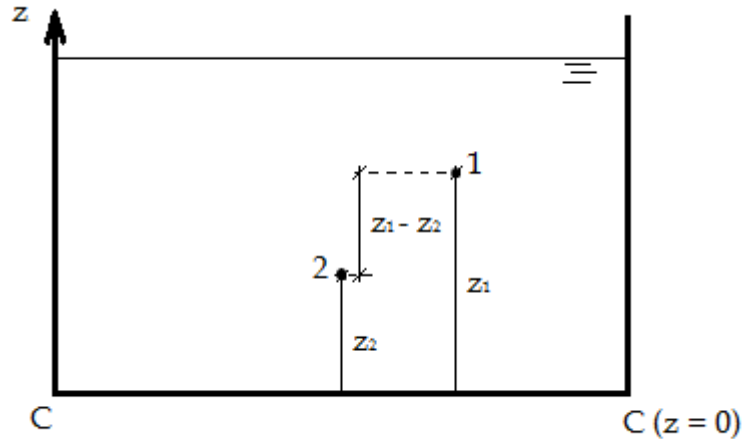
Plano de carga hidrostático: la ley de la hidrostática nos dice que el extremo superior de cada segmento resultante estará contenido en un plano horizontal al que se le denomina *plano de carga hidrostático*.

Carga en un punto x : es la altura, o distancia vertical, existente entre el punto considerado y el plano de carga hidrostático.

Superficie de nivel o plano piezométrico: es el plano horizontal, cuyos puntos se encuentran, todos, a la misma cota con respecto al plano de comparación.

Principio de Pascal: la presión ejercida en un punto cualquiera de una masa líquida, homogénea y en reposo se transmite a cualquier punto de la misma con igual intensidad.

En la siguiente figura consideraremos dos puntos cualesquiera 1 y 2, de una masa líquida, homogénea y en reposo:



Supongamos que, en el punto 1, la presión sufre, por cualquier causa, un incremento p_1 y que, por igual motivo, ocurre un incremento diferente en el punto 2 al que llamaremos p_2 . Aplicando la ecuación fundamental de la hidrostática antes y después del incremento obtendremos que:

Antes:

$$p_2 - p_1 = \gamma(z_1 - z_2)$$

Después:

$$p_2 + p_2 - (p_1 + p_1) = \gamma(z_1 - z_2)$$

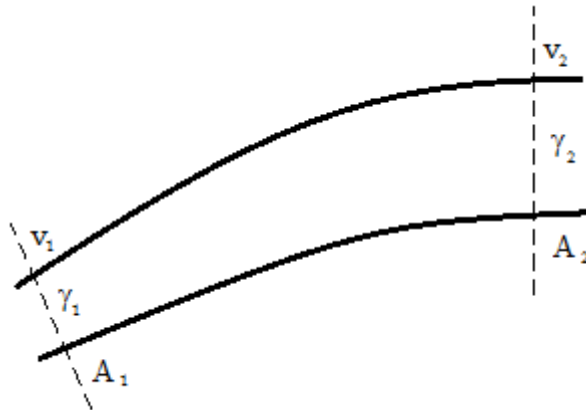
Igualando, obtendremos que:

$$p_1 = p_2 \quad \text{c.q.d.}$$

3.3.2.- CINEMÁTICA

Ecuación de continuidad: el caudal a lo largo de una conducción, sin aportes ni consumos intermedios, es constante.

Consideremos dos secciones rectas, A_1 y A_2 , en puntos bien diferenciados de una conducción recorrida por un fluido incompresible cualquiera. Al volumen finito así considerado se le llamará volumen de control. Llamemos v_1 y v_2 a las velocidades del fluido en cada una de las secciones, siendo γ_1 y γ_2 los pesos específicos del mismo en cada una de ellas. Si en el tramo de la conducción comprendido entre ambas secciones no hay aportes ni consumos de caudal, esto es, el volumen de control es fijo, la cantidad de fluido que atraviesa la sección 1 en la unidad de tiempo (caudal en peso, masa o volumen) debe ser igual a la que atraviesa A_2 .



La expresión analítica de la llamada ecuación de continuidad resulta, por tanto:

$$Q_W = \gamma_1 v_1 A_1 = \gamma_2 v_2 A_2$$

$$Q_V = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Donde:

Q_W : caudal en peso

Q_V : caudal en volumen

En el caso de que hubiese más de un caudal entrante o saliente:

$$\sum_e Q_e = \sum_s Q_s$$

Donde:

e : secciones de entrada

s : secciones de salida

Tipos de flujo: los distintos tipos de flujo se pueden clasificar según diferentes factores:

- Viscosidad:
 - Flujo ideal: cuando la viscosidad es nula. Caso hipotético.
 - Fluido viscoso
- Variación de su densidad:
 - Flujo incompresible: cuando estas variaciones son insignificantes.
 - Flujo compresible: cuando no podemos despreciarlas.
- Estabilidad:
 - Flujo laminar: las capas de fluido se deslizan unas sobre otras de forma estable, sin mezclarse entre sí.
 - Flujo turbulento: el movimiento de las partículas del fluido es inestable, caprichoso y aleatorio. En la corriente se forman remolinos y torbellinos. Las trayectorias son irregulares. Es el más habitual en ingeniería.
- Variación espacial:
 - Flujo uniforme: cuando la velocidad permanece constante a lo largo de una trayectoria.
 - Flujo no uniforme: cuando la velocidad varía a lo largo de una trayectoria.
- Variación temporal:
 - Flujo estacionario o permanente: cuando ni las características del fluido ni las del movimiento varían con el tiempo.
 - Flujo no estacionario, variable, no permanente o transitorio: cuando sí varían las características del fluido o las del movimiento.
- Dimensiones del estudio:
 - Flujos unidimensionales
 - Flujos bidimensionales
 - Flujos tridimensionales

3.3.3.- HIDRODINÁMICA

Energía de cota, de presión y de velocidad: la energía mecánica es la capacidad de un sistema para realizar trabajo. La ecuación de dimensiones es:

$$[E] = [T] = [F][L]$$

A continuación se exponen los diferentes tipos de energía específica tanto en el sistema internacional (SI) como en el sistema técnico (ST)

- Energía específica potencial geodésica o altura geodésica: es la debida a la posición o cota del agua con respecto a un plano de comparación.

$$e_{z\ ST} = \frac{W \cdot z}{W} = z \quad (m)$$

$$e_{z\ SI} = \frac{W \cdot z}{M} = \frac{\gamma \cdot vol \cdot z}{\rho \cdot vol} = z \cdot g \quad \left(\frac{m^2}{s^2}\right)$$

- Energía específica de presión o altura de presión: es la debida a la presión del fluido.

$$e_{p\ ST} = \frac{p \cdot W}{W \cdot \gamma} = \frac{p}{\gamma} \quad (m)$$

$$e_{p\ SI} = \frac{p \cdot W}{M \cdot \gamma} = \frac{p}{\rho \cdot vol} \cdot \frac{\gamma \cdot vol}{\gamma} = \frac{p}{\rho} \quad \left(\frac{m^2}{s^2}\right)$$

- Energía específica de velocidad o altura de velocidad: es la debida a la velocidad del fluido, v .

$$e_{v\ ST} = \frac{v^2 \cdot W}{2g \cdot W} = \frac{v^2}{2g} \quad (m)$$

$$e_{v\ SI} = \frac{v^2 \cdot W}{2g \cdot M} = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{\rho \cdot g \cdot vol}{\rho \cdot vol} = \frac{v^2}{2} \quad \left(\frac{m^2}{s^2}\right)$$

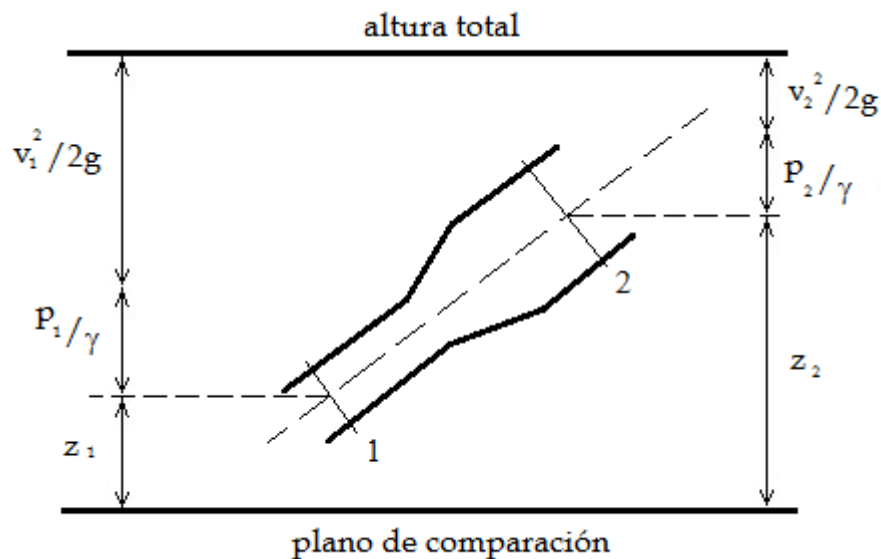
Ecuación de Bernoulli: en un fluido ideal en movimiento, bajo la acción de la gravedad, la suma de las alturas geodésica, de presión y de velocidad se mantiene constante.

Si consideramos un caudal de agua incompresible, que se desplaza entre dos secciones cualesquiera de una conducción, en ausencia de fenómenos de intercambios de calor y sin rozamiento, es decir, en condiciones de flujo ideal; podemos expresar la energía específica total mediante la expresión:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = cte \quad (m, \text{ para 1 Kp de fluido})$$

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} = cte \quad \left(\frac{m^2}{s^2}, \text{ para 1 Kg de fluido } \right)$$

La siguiente figura nos ayuda a ampliar esta idea ya que en ella puede verse que, durante el movimiento de un fluido ideal entre dos secciones, una forma de energía puede transformarse en otra, permaneciendo constante la energía específica total.



Para un fluido real, es decir, viscoso, hay que considerar el rozamiento, el cual puede ser de dos tipos: interno, de las propias partículas del fluido entre sí; y externo, de las partículas del fluido con las paredes de la conducción.

Este razonamiento se transformará en calor elevándose imperceptiblemente la temperatura del fluido y la del ambiente. A esta energía no aprovechable se la denomina *pérdida* y debe reflejarse en la ecuación de Bernoulli para que ésta sea válida:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} - H_{r(1-2)} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = cte$$

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} - H_{r(1-2)} = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} = cte$$

Donde el término $H_{r(1-2)}$ representa la pérdida de energía por rozamiento entre los puntos 1 y 2.

Por último, si en la corriente se intercalan máquinas que extraigan de ella energía (turbinas o ruedas hidráulicas), ésta disminuirá en una cantidad H_T . Por el contrario, si atraviesa máquinas que le suministren energía (bombas, ventiladores o norias), la energía total de la corriente se verá aumentada en una cantidad concreta H_B . Por estos motivos, finalmente, **la ecuación de Bernoulli o ecuación de la energía mecánica completa** quedará:

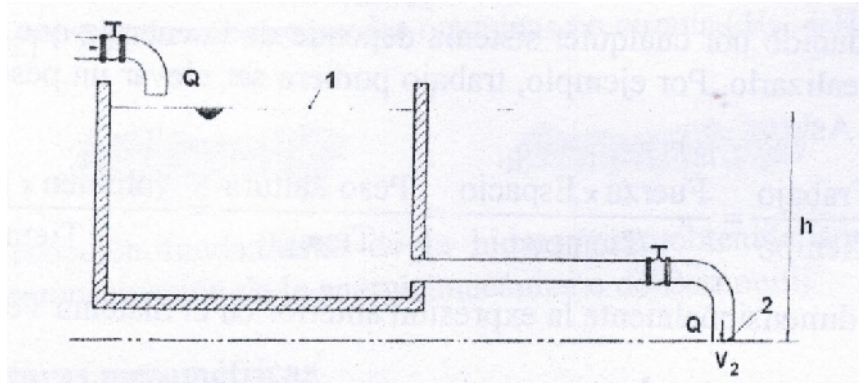
$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} - H_{r(1-2)} + H_B - H_T = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = cte$$

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} - H_{r(1-2)} + H_B - H_T = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} = cte$$

La energía del agua en una determinada sección aguas arriba, más la recibida del exterior (bomba, noria), menos la cedida al exterior (turbina, rueda hidráulica), menos las pérdidas de energía por rozamiento al pasar de dicha sección a otra, aguas abajo, ha de ser igual a su energía en esta última.

Salida por un orificio: ecuación de Torricelli

Sea el depósito de la figura de forma cualquiera con contenido de agua. En su parte inferior se ha practicado un orificio unido a una tubería.



Como en el depósito entra un caudal igual al que sale por la tubería, su superficie libre se mantiene a una altura h constante conforme al plano de referencia en 2.

Si aplicamos Bernouilli entre 1 y 2, considerando despreciables las pérdidas por rozamiento (fluido ideal):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad h + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

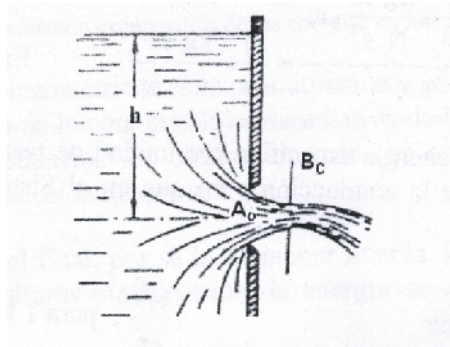
Esta última expresión es conocida como ecuación de Torricelli. Su significado físico no es otro que: la velocidad del líquido, a la salida de un orificio, es igual a la que adquiriría una partícula del mismo, al caer libremente desde una altura h , independientemente del tipo de fluido del que se trate, ya que no aparece el valor del peso específico en la expresión.

Por efecto de la inercia y viscosidad del líquido, el chorro de agua que sale del depósito sufre una deflexión que da lugar a su contracción. Es la llamada *vena contracta* y para hallar el caudal de salida será preciso introducir unos

coeficientes adimensionales de corrección calculados experimentalmente y próximos a la unidad. Estos coeficientes son:

C_v : coeficiente de velocidad. Corrige el error de no considerar las pérdidas de energía por rozamiento al calcular la velocidad.

C_c : coeficiente de contracción. corrige el hecho de que el área de la vena contracta, precisamente por la contracción sufrida, sea menor que la del orificio practicado, es decir:



$$B_c = A_o \cdot C_c$$

Así, la ecuación general de desagüe por orificios, tubos y toberas será:

$$Q = V \cdot B_c = A_o \cdot C_c \cdot C_v \sqrt{2gh} = A_o \cdot C_q \sqrt{2gh}$$

Donde el coeficiente de caudal C_q :

FIGURA							
C_c	0.62	1.00	1.00	0.52	1.00	0.98	1.00
C_v	0.98	0.98	0.82	0.98	0.45 a 0.50	0.96	0.98
C_q	0.61	0.98	0.82	0.51	0.45 a 0.50	0.94	0.98

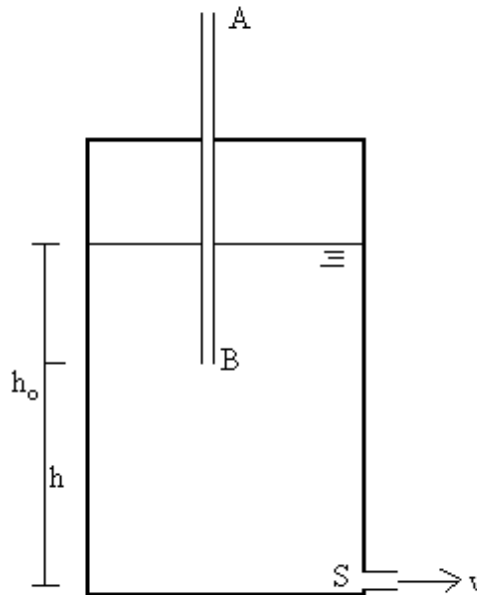
El frasco de Mariotte: de acuerdo con el teorema de Torricelli, la velocidad de salida de un líquido por un orificio practicado en su fondo, es la misma que la que adquiere un cuerpo que cayese libremente en el vacío desde una altura h , siendo h la altura de la columna de fluido. Es decir:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Donde, a medida que el fluido sale por el orificio, la altura h de fluido en el depósito va disminuyendo. Si S es la sección del orificio, el gasto $S \cdot v$, o volumen de fluido que sale por el orificio en la unidad de tiempo no es constante.

Si queremos producir un gasto constante podemos emplear el denominado frasco de Mariotte.

Sea un frasco de la forma:



Consiste en un frasco lleno de fluido hasta una altura h_0 , que está cerrado por un tapón atravesado por un tubo cuyo extremo inferior está sumergido en el líquido. El fluido sale del frasco por un orificio practicado en el fondo del

recipiente. En el extremo inferior B del tubo, la presión es la atmosférica ya que está entrando aire por el tubo, a medida que sale el líquido por el orificio.

La velocidad de salida del fluido no corresponderá a la altura h_0 desde el orificio a la superficie libre de fluido en el frasco, sino a la altura h o distancia entre el extremo inferior B del tubo y el orificio.

Dado que h permanece constante en tanto que el nivel de líquido esté por encima del extremo inferior del tubo, la velocidad del fluido y por tanto, el gasto se mantendrán constantes.

Cuando la altura de fluido en el frasco, h_0 , es menor que h , la velocidad de salida v del fluido deja de ser constante.

La velocidad de salida v puede modificarse subiendo o bajando el extremo inferior del tubo AB en el frasco.

3.4.- FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

3.4.1.- ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Llamamos *ecuación diferencial ordinaria* (E.D.O.) a una ecuación que relaciona una función (o variable dependiente), su variable y sus derivadas.

Normalmente las soluciones de una ecuación diferencial dependen de una o varias constantes y, por lo tanto, tendremos infinitas soluciones posibles. En ocasiones dispondremos de condiciones iniciales del estilo $y(a) = b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ que nos permitirá determinar cuál es la solución que nos interesa.

3.4.1.1.- ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

3.4.1.1.1.-VARIABLES SEPARADAS

Considerando una ecuación de la siguiente forma:

$$y' = g(y) \cdot h(x)$$

Podemos “separar” las variables de este modo:

$$\frac{y'}{g(y)} = h(x)$$

Si G es una primitiva de $1/g$ y H es una primitiva de h , integrando tendremos:

$$G(y) = H(x)$$

Donde nos quedará despejar y .

Es de interés observar que hemos podido integrar el miembro de la izquierda porque está multiplicado por la derivada de y .

Nota: al dividir entre $g(y)$ podemos perder soluciones, al utilizar este proceso. Por tanto, tendremos que comprobar qué pasa cuando $g(y) = 0$. En tal caso, la ecuación quedaría como $y' = 0$, así que lo que tendremos que comprobar es si existen soluciones constantes, es decir, si hay funciones de la forma $y = k$ tales que $g(k) = 0$.

3.4.1.1.2.- ECUACIONES DE LA FORMA $y' = f(ax + by)$

Si $a = 0$ ó $b = 0$, la ecuación es de variables separadas. En cualquier otro caso, se realiza el cambio $z = ax + by$, por lo que tendremos:

$$z = a + by = a + bf(ax + by) = a + bf(z)$$

Quedando una ecuación de variables separadas que podremos resolver como en la sección anterior. No debemos olvidarnos de deshacer el cambio al final.

3.4.1.1.3.- ECUACIONES DE LA FORMA $y' = f(y/x)$

Para resolver este tipo de ecuaciones se realiza el cambio $z = y/x$. Así que tendremos:

$$f(z) = f(y/x) = y' = (zx)' = z'x + z$$

Y así obtenemos una ecuación de variables separadas que podemos expresar como:

$$\frac{z}{f(z) - z} = \frac{1}{x}$$

Como sucedía anteriormente, al usar este método podríamos haber perdido soluciones cuando $f(z) - z = 0$ así que tendríamos que comprobar si hay soluciones de la forma $z = k$.

3.4.1.1.4.- ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Las ecuaciones lineales de primer orden son de la forma

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

Primeramente resolveremos la ecuación homogénea:

$$y' = a(x) \cdot y$$

Esta ecuación es de variables separadas y nos dará una solución de la forma:

$$y = K \cdot f(x)$$

Para resolver la ecuación original, utilizaremos una función de la forma

$y = K(x) \cdot f(x)$ y la sustituiremos en la ecuación original para determinar $K(x)$.

3.4.1.2.- ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR CON COEFICIENTES CONSTANTES

Una ecuación lineal de orden superior es una ecuación de la forma

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

Donde $y^{(k)}$ representa la derivada k -ésima de y . Nos vamos a limitar a estudiar ecuaciones de este tipo cuando los coeficientes a_i son constantes.

3.4.1.2.1.- SIN TÉRMINO INDEPENDIENTE

Considerando una ecuación de la forma:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (y) + a_n y = 0$$

Se llama “polinomio característico” de la ecuación lineal a:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_{n-1} r + a_n$$

En las condiciones de la definición anterior, sea λ una raíz del polinomio característico y sea p su multiplicidad. Entonces:

- (i) Si λ es un número real, entonces las siguientes funciones son solución de la ecuación diferencial lineal:

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{p-1} e^{\lambda x}$$

- (ii) Si $\lambda = a + bi$ es un número complejo ($a - bi$ también será solución de la ecuación característica), entonces las siguientes funciones son solución de la ecuación diferencial lineal:

$$e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx), x e^{ax} \cos(bx), x e^{ax} \sin(bx), \dots, x^{p-1} e^{ax} \cos(bx), x^{p-1} e^{ax} \sin(bx)$$

Todas las soluciones de una ecuación de la forma:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

Son combinaciones lineales de las soluciones obtenidas en (i) e (ii).

3.4.1.2.2.- CON TÉRMINO INDEPENDIENTE VARIABLE

MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Sea y_p una solución de la ecuación:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x)$$

Todas las soluciones de la ecuación anterior son de la forma:

$$y = y_p + y_h$$

Donde y_h es solución de:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

Por tanto, nos bastará con encontrar una solución particular, ya que sabemos determinar todas las soluciones y_h de la ecuación homogénea.

Veamos, pues, cómo podemos realizarlo en un caso determinado:

Si $b(x) = e^{ax}(p(x) \cos(bx) + q(x) \sin(bx))$, con $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios:

- (i) Si $r = a \pm bi$ no es una raíz del polinomio característico, tendremos una solución de la forma:

$$y_p(x) = e^{ax}(P(x) \cos(bx) + Q(x) \sin(bx))$$

Siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de grado igual al máximo de los grados de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$.

- (ii) Si $r = a \pm bi$ es una raíz del polinomio característico de multiplicidad k , tendremos una solución de la forma:

$$y_p(x) = x^k e^{ax} (P(x) \cos(bx) + Q(x) \sin(bx))$$

Siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de grado igual al máximo de los grados de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$.

Si en la proposición anterior, $a = 0$ ó $b = 0$ ó ambos a la vez son 0, tendremos casos particulares más sencillos:

- (i) (caso $a = b = 0$) Si $b(x) = b_s x_s + b_{s-1} x^{s-1} + \dots + b_1 x + b_0$

- (a) Si $r = 0$ no es raíz del polinomio característico, buscaremos una solución de la forma:

$$y_p(x) = A_s x_s + A_{s-1} x^{s-1} + \dots + A_1 x + A_0$$

- (b) Si $r = 0$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad k , buscaremos una solución de la forma:

$$y_p(x) = x^k (A_s x_s + A_{s-1} x^{s-1} + \dots + A_1 x + A_0)$$

- (ii) (caso $a = 0$) Si $b(x) = p(x) \cos(bx) + q(x) \sin(bx)$, con $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios:

- (a) Si $r = \pm bi$ no es raíz del polinomio característico, tendremos una solución de la forma:

$$y_p(x) = P(x) \cos(bx) + Q(x) \sin(bx)$$

Siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de grado igual al máximo de los grados de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$.

- (b) Si $r = \pm bi$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad k , buscaremos una solución de la forma:

$$y_p(x) = x^k(P(x) \cos(bx) + Q(x) \sin(bx))$$

Siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de grado igual al máximo de los grados de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$.

- (iii) (caso $b = 0$) Si $b(x) = e^{ax}p(x)$, con $p(x)$ un polinomio:

- (a) Si $r = a$ no es raíz del polinomio característico, tendremos una solución de la forma:

$$y_p(x) = e^{ax}P(x)$$

Siendo $P(x)$ un polinomio de grado igual al grado de $p(x)$.

- (b) Si $r = a$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad k , tendremos una solución de la forma:

$$y_p(x) = x^k e^{ax}P(x)$$

Siendo $P(x)$ un polinomio de grado igual al grado de $p(x)$.

3.4.1.3.- SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN 1 CON COEFICIENTES CONSTANTES

En este apartado estudiaremos cómo resolver sistemas de n ecuaciones diferenciales lineales con n incógnitas. Nos centraremos en el caso para $n = 2$ aunque podríamos aplicar el método para n arbitrario. Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1(t) \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2(t) \end{cases}$$

Observemos que en esta ocasión, x e y son funciones y t es la variable. Vamos a resolver este sistema reduciéndolo a resolver ecuaciones lineales de orden superior, con coeficientes constantes, con término independiente variable.

El proceso es el siguiente:

1. Cambiamos x' por $D \cdot x$ e y' por $D \cdot y$
2. Multiplicamos ambas ecuaciones por los coeficientes necesarios y, sumándolas o restándolas, obtenemos una nueva ecuación en la que habremos eliminado una incógnita.
3. En esta nueva ecuación, cambiamos lo que esté multiplicado por D por su derivada.
4. Resolvemos esta ecuación y así tendremos una de las 2 funciones. Sustituyendo en la ecuación inicial donde aparece la derivada de esta función, obtenemos la otra.

3.4.2.- MÉTODOS NUMÉRICOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Existen diferentes métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial en ecuaciones diferenciales ordinarias y en sistemas de e.d.o., A continuación se presentan algunos de dichos métodos:

3.4.2.1.- MÉTODO DE EULER

El Método de Euler o de las Tangentes es el primer y más sencillo ejemplo de método numérico para resolver un problema de valor inicial:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

En el que suponemos que se verifican las hipótesis del Teorema de Picard y, por tanto, existe una única solución para el problema.

Si interpretamos la e.d.o. $y' = f(x, y)$ como un campo de direcciones en el plano $x - y$ y la condición inicial $y(x_0) = y_0$ como un punto (x_0, y_0) de dicho plano, podemos aproximar la función solución $y(x)$ por medio de la recta tangente a la misma, que pasa por ese punto:

$$y(x) \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

Donde la pendiente de dicha tangente es: $m = y'(x_0)$ y, por tanto:

$$m = f(x_0, y_0)$$

Calculamos así, de manera aproximada, el valor de la solución y en el punto de abscisa x_1 como:

$$y(x_1) \quad y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

una vez calculado este punto aproximado, podemos repetir el método para obtener otro punto aproximado (x_2, y_2) de la forma:

$$y(x_2) \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$$

Y así sucesivamente.

En este método es habitual tomar abscisas equiespaciadas, esto es, calcular la solución aproximada en puntos de la forma:

$$x_n = x_{n-1} + h$$

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$$

El Método de Euler, desde el punto de vista geométrico, aproxima a la función solución por medio de una línea poligonal. Esta aproximación será tanto peor cuanto mayor sea en número de pasos, es decir, cuanto más “lejos” nos encontremos del punto inicial (x_0, y_0) . Por el contrario, el error será mayor cuanto más grande sea el “paso” del método h .

3.4.2.2.- MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

En general, los Métodos de Runge-Kutta, consisten en sustituir el Problema de Valor Inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

Por la ecuación integral equivalente:

$$\int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \rightarrow y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx$$

Para proceder a aproximar esta última integral mediante un método numérico adecuado (recordemos que $y(x)$ es desconocida).

Si planteamos el problema de nuevo, “paso a paso”, tendremos:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

3.4.2.2.1.- MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN

Lo primero que podemos aplicar es integrar mediante el método de los trapecios, es decir, tomando:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx \frac{1}{2} h (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

MÉTODOS NUMÉRICOS EN EDO

Al ser desconocida y_{n+1} en la expresión anterior, lo aproximaremos por \bar{y}_{n+1} , donde \bar{y}_{n+1} es la estimación de y_{n+1} que resultaría aplicando el método de Euler. Tendremos, pues:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx \frac{1}{2} h (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}))$$

con

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

Y llegaremos al método:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}))$$

Lo normal es presentar el método con las siguientes expresiones:

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f(x_{n+1}, y_n + k_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

3.4.2.2.2- MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE TERCER ORDEN

Este método es parecido al anterior, pero integrando por el método de Simpson, entonces:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx \frac{h}{3} [(f(x_n, y_n) + 4 f(x_{n+\frac{1}{2}}, \bar{y}_{n+\frac{1}{2}}) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}))]$$

Donde \bar{y}_{n+1} e $\bar{y}_{n+\frac{1}{2}}$ son estimaciones, puesto que y_{n+1} e $y_{n+\frac{1}{2}}$ no son conocidos.

La estimación de $\bar{y}_{n+\frac{1}{2}}$ se hace por el método de Euler:

$$\bar{y}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$$

Mientras que para la estimación de \bar{y}_{n+1} se pueden considerar varias opciones, por ejemplo:

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

Es decir, el Método de Euler de nuevo, o por ejemplo:

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h f\left(x_{n+\frac{1}{2}}, \bar{y}_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

Que consiste en variar el Método de Euler tomando la pendiente de la recta tangente en el punto medio, en vez de la tangente en el punto, propiamente dicho.

Por último, lo más usual es tomar una combinación de las dos opciones¹:

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h \left[2 f\left(x_{n+\frac{1}{2}}, \bar{y}_{n+\frac{1}{2}}\right) - f(x_n, y_n) \right]$$

Resumimos, pues, el Método de Runge-Kutta de tercer orden como:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

El error local en el Método de tercer orden es proporcional a h^4 y, por lo tanto, el global lo es a h^3 .

¹ El razonamiento que lleva a tomar esta combinación en concreto se basa en tomar una combinación genérica:

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h \left[\theta f(x_n, y_n) + (1 - \theta) f\left(x_{n+\frac{1}{2}}, \bar{y}_{n+\frac{1}{2}}\right) \right]$$

y optimizar el valor de θ imponiendo exactitud en la fórmula de Taylor al tercer orden, ello lleva a que necesariamente $\theta = -1$.

3.4.2.2.3.- MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN

El Método de Runge-Kutta de cuarto orden se deduce de forma similar a la del Método de tercer orden sólo que, en este caso, se introduce un nuevo paso intermedio en la evaluación de la derivada. Una vez más, se presentan varias opciones en la evaluación y es posible ajustar de tal manera que se garantice el error local de manera proporcional a h^5 , lo cual lleva a un error global proporcional a h^4 . El Método de cuarto orden más habitual es el determinado por las fórmulas siguientes:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Y, de la misma manera que el método de tercer orden, está basado en el método de interacción de Simpson. Los errores global y local son, en este caso, proporcionales a h^5 y h^4 respectivamente.

3.4.2.3.- ESTABILIDAD

Procedemos ahora a analizar el comportamiento del Método de Euler en determinadas situaciones, lo cual producirá la necesidad de introducir métodos más precisos.

Además del error propio del método (local en h^2 y global en h), lo cual no es en principio excesivamente grave si es posible reducir h a voluntad (aunque puede conllevar a errores de importancia considerable de redondeo y a un tiempo excesivo de computación), existe un problema serio asociado al método y es su inestabilidad. Veamos el siguiente ejemplo:

Consideremos la ecuación de Malthus con constante negativa:

$$y' = -\alpha y \quad ; \quad y(0) = y_0$$

Con α e y_0 positivas. La solución exacta es sencilla:

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha t}$$

El Método de Euler para este caso conduce a la expresión:

$$y_{n+1} = y_n - \alpha y_n \cdot h = (1 - \alpha h) y_n$$

Es sencillo comprobar que si $\alpha h < 1$, entonces la solución numérica es decreciente y positiva, como ocurre en la solución real exacta, pero si $\alpha h > 1$, entonces el signo de la solución se va alternando y, más aún, si $\alpha h > 2$, entonces la magnitud de la solución se va incrementando en cada paso (o sea, resulta creciente en valor absoluto), y la solución oscila. Este es un comportamiento típico de lo que se conoce en Matemáticas como “inestabilidad del método”.

3.4.2.4.- MÉTODO DE EULER MODIFICADO

Se trata de un método más preciso y más estable que el de Euler. La base de este método es usar el método de los trapecios para integrar la ecuación $y' = f(x, y)$. Tomaremos así, en el intervalo $[x_0, x - 1]$:

$$y' = f(x, y(x)) \quad \int_{y_0}^{y_1} dy = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx \cong \frac{x_1 - x_0}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1))$$

Repitiendo el razonamiento tendremos:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n))$$

si la función f es lineal en la variable y , entonces es posible despejar de forma simple y_{n+1} en la ecuación anterior. Si no es lineal, necesitaremos un método numérico para calcular la correspondiente y_{n+1} . Normalmente se utiliza el método de las sustituciones sucesivas.

3.4.2.5.- MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SISTEMAS

Los métodos que hemos planteado de Runge-Kutta y de Euler, se aplican de manera sencilla a sistemas de ecuaciones de primer orden, y, por tanto, a ecuaciones de orden superior al primero.

Comencemos con el Método de Euler aplicado a un sistema de dos ecuaciones de primer orden:

$$\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right\}$$

La extensión natural del método ya expuesto nos conduce a las expresiones:

$$\begin{array}{l} t_{n+1} = t_n + h \\ x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot g(t_n, x_n, y_n) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

4.- ESTUDIOS TEÓRICO-PRÁCTICOS

4.1.- ESTUDIO TEÓRICO

4.1.1.- TIEMPO DE VACIADO DE DEPÓSITOS

A continuación, realizaremos un estudio de análisis del tiempo de vaciado de una serie de depósitos con diferentes secciones.

El estudio lo realizaremos mediante un análisis dimensional de cada uno de los diferentes depósitos en el que se determinará, en primer lugar, la ecuación que relaciona, en cada caso, la altura de agua inicial del depósito H , con su variación a lo largo del tiempo $h(t)$, debida a la salida del líquido por una abertura situada en la parte inferior del depósito.

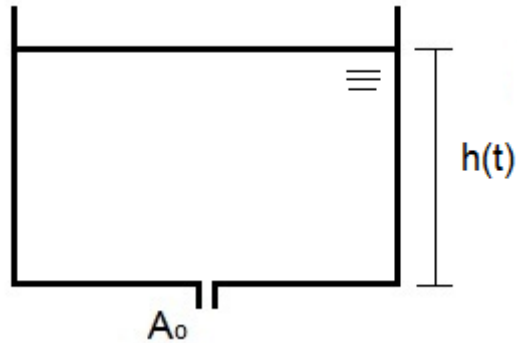
Una vez hallada la ecuación de la altura del agua para cada instante, procederemos a la determinación de la constante de corrección K para cada caso. Ésta, podrá determinarse para la situación inicial en la que se cumple que:

$$\begin{matrix} t = 0 \\ h(0) = H \end{matrix} \quad \{$$

Una vez hallada la constante K , sólo nos quedará hallar el tiempo de vaciado mediante la condición:

$$h(t) = 0$$

4.1.1.1.- TIEMPO DE VACIADO DE UN DEPÓSITO CUALQUIERA



$$A_0 \text{ Cte.} \rightarrow A_0 = \pi \cdot r^2$$

$V(t)$ Volumen en función de la altura de la lámina de agua, en el instante t

$V'(t)$ Caudal de salida del agua

$h(t)$ Altura del agua en el instante t

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad v = \sqrt{2gh}$$

$$V'(t) = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh}$$

$$V(t) = \iiint_C 1 \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int A(s) \cdot ds$$

$$\boxed{V(t) = \int A(s) \cdot ds}$$



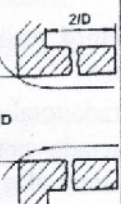

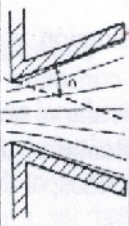
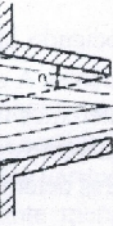

$$V(t) = f(t) - f(0) \quad V'(t) = (f(t) - f(0))'$$

$$V'(t) = f'(t) \cdot h'(t) = A(t) \cdot h'(t) = A(h) \cdot h'$$

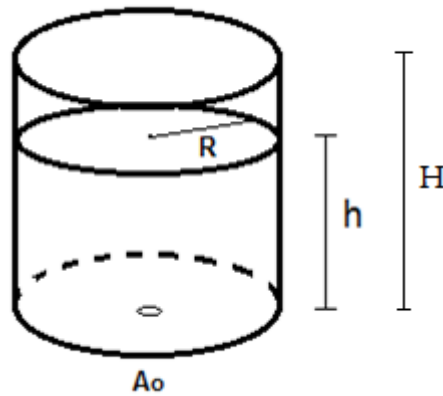
$$V'(t) = A(t) \cdot h$$

$$V'(t) = V'(t) \quad \boxed{A(t) \cdot h' = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh}}$$

C C_q Coeficiente de caudal → Diferentes coeficientes de caudal dependiendo del tipo de abertura → Apartado 3.3.3.- *HIDRODINÁMICA* → Salida por un orificio: ecuación de Torricelli.

FIGURA							
C_c	0.62	1.00	1.00	0.52	1.00	0.98	1.00
C_v	0.98	0.98	0.82	0.98	0.45 a 0.50	0.86	0.98
C_q	0.61	0.98	0.82	0.51	0.45 a 0.50	0.94	0.98

4.1.1.2.- DEPÓSITO CILÍNDRICO DE RADIO R



$$A(t) \cdot h' = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh}$$

$$A(t) = \pi R^2$$

$$A(t) \cdot h' = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh} \quad \pi R^2 \cdot h' = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh}$$

$$\pi R^2 \cdot \frac{dh}{dt} = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g \cdot h} \quad \pi R^2 \cdot \int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot \int dt$$

$$\pi R^2 \cdot \frac{h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot (t + K)$$

$$\sqrt{h(t)} = -\frac{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}{2 \cdot \pi R^2} \cdot (t + K)$$

En el instante inicial: $t = 0 \quad h(0) = H$

$$\bar{H} = -\frac{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}{2 \cdot \pi R^2} \cdot (0 + K)$$

$$K = -\frac{2 \cdot \pi R^2 \cdot \bar{H}}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}$$

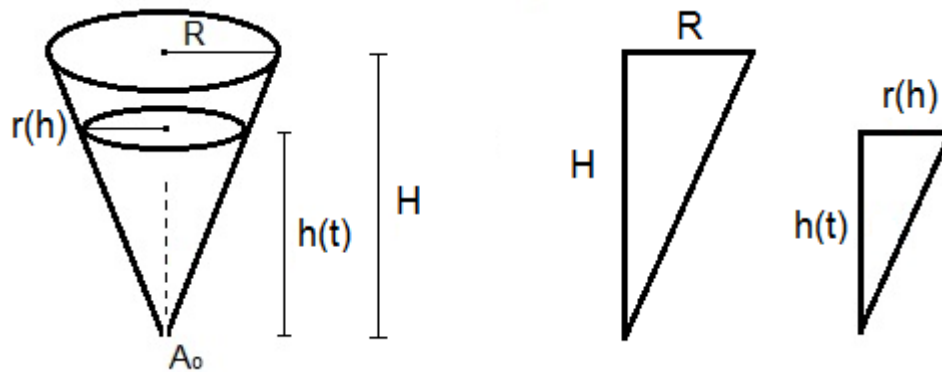
Tiempo de vaciado del depósito: $h(t) = 0$

$$\bar{0} = -\frac{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}{2 \cdot \pi R^2} \cdot \left(t - \frac{2 \cdot \pi R^2 \cdot \sqrt{H}}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \right)$$

$$t - \frac{2 \cdot \pi R^2 \cdot \bar{H}}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} = 0 \quad t = \frac{2 \cdot \pi R^2 \cdot \bar{H}}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}$$

$$\boxed{t = \frac{\pi R^2 \cdot \sqrt{2gH}}{C \cdot A_0 \cdot g}}$$

4.1.1.3.- DEPÓSITO CÓNICO DE RADIO R



$$\frac{r(h)}{h(t)} = \frac{R}{H} \quad r(h) = \frac{R \cdot h(t)}{H}$$

$$V'(t) = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh}$$

$$V(t) = \int A(s) \cdot ds \quad V'(t) = A(t) \cdot h' \quad V'(t) = \pi(r(h))^2 \cdot h'(t)$$

$$V(h) = \pi \left(\frac{R \cdot h(t)}{H} \right)^2 \cdot h'(t)$$

$$V'(t) = V'(t) \quad \pi \left(\frac{R \cdot h(t)}{H} \right)^2 \cdot h'(t) = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g \cdot h(t)}$$

$$\pi \left(\frac{R \cdot h}{H} \right)^2 \cdot \frac{dh}{dt} = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh}$$

$$\pi \frac{R^2 \cdot h^2}{H^2} \cdot \frac{dh}{dt} = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h} \quad \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \int \frac{h^2}{\sqrt{h}} dh = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot \int dt$$

$$\pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \int h^{\frac{3}{2}} \cdot dh = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot (t + K)$$

$$\pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} (t + K) \quad h^{\frac{5}{2}} = \frac{-C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} (t + K) H^2 \cdot 5}{2\pi \cdot R^2}$$

$$h(t) = \left(-\frac{5 \cdot C \cdot A_0 \cdot H^2 \cdot \sqrt{2g}}{2\pi \cdot R^2} (t + K) \right)^{\frac{2}{5}}$$

En el instante inicial: $t = 0 \rightarrow h(0) = H$

$$H = \left(\frac{-5 \cdot C \cdot A_0 \cdot H^2 \cdot \sqrt{2g}}{2\pi \cdot R^2} (0 + K) \right)^{\frac{2}{5}} \rightarrow K = -\frac{2\pi \cdot R^2 \cdot H^{\frac{5}{2}}}{5 \cdot \sqrt{2g} \cdot H^2 \cdot C \cdot A_0}$$

$$K = -\frac{2\pi \cdot R^2 \cdot H^{\frac{1}{2}}}{5 \cdot \sqrt{2g} \cdot C \cdot A_0}$$

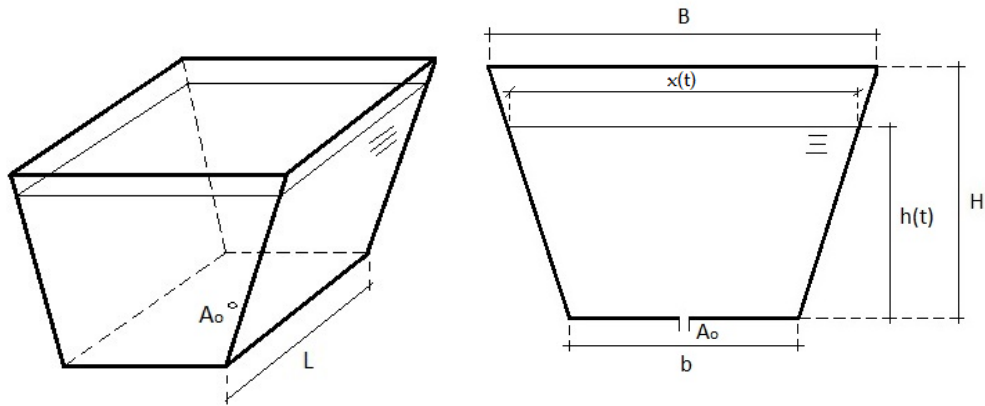
Tiempo de vaciado del depósito: $h(t) = 0$

$$0 = \left(\frac{-5 \cdot C \cdot A_0 \cdot H^2 \cdot \sqrt{2g}}{2\pi \cdot R^2} \left(t - \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot H^{\frac{1}{2}}}{5 \cdot \sqrt{2g} \cdot C \cdot A_0} \right) \right)^{\frac{2}{5}}$$

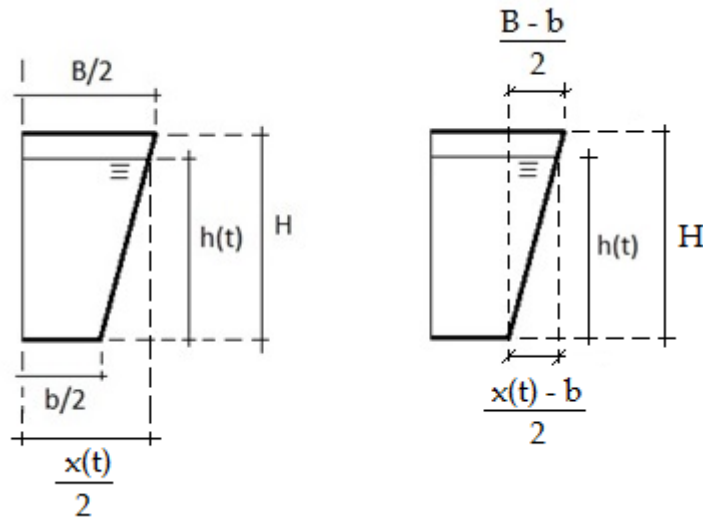
$$t - \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot H^{\frac{1}{2}}}{5 \cdot \sqrt{2g} \cdot C \cdot A_0} = 0$$

$$\boxed{t = \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot H^{\frac{1}{2}}}{5 \cdot \sqrt{2g} \cdot C \cdot A_0}}$$

4.1.1.4.- DEPÓSITO TRAPEZOIDAL



$$V'(t) = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh}$$



$$V'(t) = A(t) \cdot h'(t) = x(t) \cdot L \cdot h'(t)$$

$$\frac{h(t)}{\frac{x(t) - b}{2}} = \frac{H}{\frac{B - b}{2}} \quad \frac{h(t)}{x(t) - b} = \frac{H}{B - b} \quad x(t) \cdot H - b \cdot H = h(t) \cdot (B - b)$$

$$x(t) = \frac{h(t) \cdot (B - b) + b \cdot H}{H} = \frac{h(t) \cdot (B - b)}{H} + b$$

$$V(t) = \left(\frac{h(t) \cdot (B - b)}{H} + b \right) \cdot L \cdot h'(t)$$

$$\left(\frac{h(t) \cdot (B - b)}{H} + b \right) \cdot L \cdot h'(t) = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g \cdot h(t)}$$

$$\left(\frac{h \cdot (B - b)}{H} + b \right) \cdot L \cdot \frac{dh}{dt} = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}$$

$$L \cdot \int \left(\frac{(B - b) \cdot h}{H} + b \right) \frac{dh}{\sqrt{h}} = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \int dt$$

$$L \cdot \int \left(\frac{(B - b) \cdot \sqrt{h}}{H} + \frac{b}{\sqrt{h}} \right) dh = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \int dt$$

$$L \cdot \left(\frac{2 \cdot (B - b) \cdot h^{3/2}}{3 \cdot H} + 2b \cdot \sqrt{h} \right) = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot (t + K)$$

$$L \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{(B - b) \cdot (h(t))^{3/2}}{H} + 2b \cdot \sqrt{h(t)} \right) = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot (t + K)$$

En el instante inicial: $t = 0 \rightarrow h(0) = H$

$$L \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{(B-b) \cdot H^{3/2}}{H} + 2b \cdot \bar{H} \right) = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot (0 + K)$$

$$K = \frac{-L \left(\frac{2}{3} \cdot (B-b) + 2b \right) \sqrt{H}}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}$$

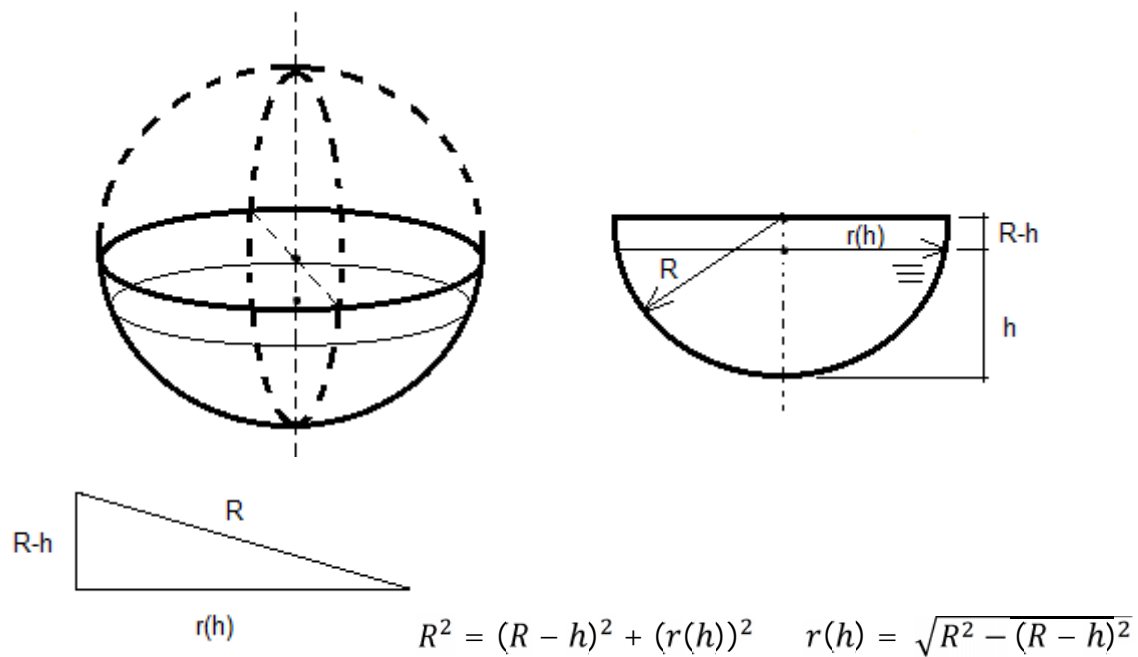
$$K = - \frac{L \cdot \bar{H} \left(\frac{2}{3} B + \frac{4}{3} b \right)}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}$$

Tiempo de vaciado del depósito: $h(t) = 0$

$$L \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{(B-b) \cdot 0}{H} + 2b \cdot 0 \right) = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot (t + K) \quad t = K$$

$$t = \frac{L \cdot \bar{H} \left(\frac{2}{3} B + \frac{4}{3} b \right)}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}$$

4.1.1.5.- DEPÓSITO CON FORMA ESFÉRICA DE RADIO R



$$r(h) = \sqrt{R^2 - (R^2 - 2Rh + h^2)} = \sqrt{R^2 - R^2 + 2Rh - h^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$$

$$V'(t) = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh}$$

$$V(t) = \int A(s) \cdot ds \quad V'(t) = A(h(t)) \cdot h' = \pi(r(h))^2 \cdot h'(t)$$

$$V'(t) = \pi(\sqrt{2Rh - h^2})^2 \cdot h'(t) = \pi(2Rh - h^2) \cdot h'(t)$$

$$V'(t) = V'(t) \quad \pi(2R \cdot h(t) - (h(t))^2) \cdot h'(t) = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g \cdot h(t)}$$

$$\pi(2Rh - h^2) \cdot \frac{dh}{dt} = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh}$$

$$(2\pi \cdot Rh - \pi h^2) \cdot \frac{dh}{dt} = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}$$

$$\int \frac{(2\pi Rh - \pi h^2)}{\sqrt{h}} dh = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot \int dt$$

$$\int \frac{2\pi Rh}{\sqrt{h}} dh - \int \frac{\pi h^2}{\sqrt{h}} dh = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot \int dt$$

$$2\pi R \int \frac{h}{\sqrt{h}} dh - \pi \int \frac{h^2}{\sqrt{h}} dh = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot \int dt$$

$$2\pi R \int h^{\frac{1}{2}} \cdot dh - \pi \int h^{\frac{3}{2}} \cdot dh = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot \int dt$$

$$2\pi R \cdot \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \pi \cdot \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot (t + K)$$

$$\frac{4}{3}\pi R \cdot h^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\pi \cdot h^{\frac{5}{2}} = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot (t + K)$$

$$\pi \left(\frac{4}{3} R \cdot (h(t))^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot (h(t))^{\frac{5}{2}} \right) = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot (t + K)$$

En el instante inicial, hay media esfera llena, por lo tanto: $t = 0 \rightarrow h(0) = R$

$$K = \frac{\pi}{-C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \left(\frac{4}{3} R \cdot h^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot h^{\frac{5}{2}} \right) - t \quad \cdot \quad t = 0 \quad h(0) = R$$

$$K = \frac{-\pi}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \left(\frac{4}{3} R \cdot R^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot R^{\frac{5}{2}} \right) - 0 = \frac{-\pi}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \left(\frac{4}{3} R^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} \cdot R^{\frac{5}{2}} \right)$$

$$K = \frac{-\pi}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{5} \right) \sqrt{R^5} = \frac{-\pi}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \cdot \frac{20 - 6}{15} \cdot R^2 \cdot \sqrt{R}$$

$$K = - \frac{14 \pi \cdot R^2 \cdot \sqrt{R}}{15 \cdot C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}$$

Tiempo de vaciado del depósito: $h(t) = 0$

$$\pi \left(\frac{4}{3} R \cdot 0^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot 0^{\frac{5}{2}} \right) = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot \left(t - \frac{14 \pi \cdot R^2 \sqrt{R}}{15 \cdot C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \right)$$

$$0 = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot \left(t - \frac{14 \pi \cdot R^2 \sqrt{R}}{15 \cdot C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \right)$$

$$\boxed{t = \frac{14 \pi \cdot R^{5/2}}{15 \cdot C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}}$$

4.1.2.- SECCIÓN ÓPTIMA DE UN CAUDAL

A continuación, procederemos al estudio de la sección óptima, desde el punto de vista hidráulico, en canales con diferentes secciones.

Previo a ello, necesitaremos aclarar una serie de conceptos necesarios para realizar dicho estudio. A continuación se presentan los conceptos más importantes. Para más información consultar el apartado 3.1.3.- *ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA SECCIÓN DE UN CANAL* y el apartado 3.1.5.- *PÉRDIDAS DE CARGA EN CANALES Y TUBERÍAS*.

La **pérdida de carga** en una tubería o canal, es la pérdida de presión en un fluido debido a la fricción de las partículas del fluido entre sí y contra las paredes de la tubería que las conduce.

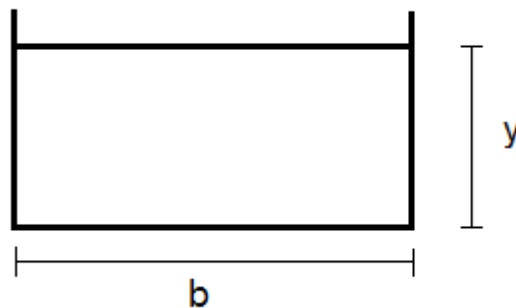
El **radio hidráulico**, es un parámetro importante en el dimensionado de canales, tubos y otros componentes de las obras hidráulicas, generalmente es representado por la letra R , y expresado en metros. Es la relación entre la superficie mojada (S , en m^2) y el perímetro mojado (P , en m). Es decir:

$$R_H = \frac{S}{P_{mojado}}$$

Desde el punto de vista hidráulico nos interesa que, en cualquier sección, el radio hidráulico sea lo mayor posible ya que, de esta manera, conseguiremos minimizar las pérdidas de carga por unidad de longitud.

4.1.2.1.- DEDUCIR CUÁL ES LA SECCIÓN MÁS FAVORABLE HIDRÁULICAMENTE DE UN CANAL RECTANGULAR

Sea una sección rectangular de lados b , y :



Como el radio hidráulico es la relación entre la superficie y el perímetro mojado, vamos a minimizar este último para que, de este modo, el R_H sea máximo.

$$R_H = \frac{S}{P_{\text{mojado}}}$$

$$S = b \cdot y \quad b = \frac{S}{y}$$

$$P_{\text{mojado}} = b + 2 \cdot y \quad P_m = \frac{S}{y} + 2 \cdot y$$

El perímetro mojado varía según la altura de la lámina de agua:

$$Pm = S \cdot y^{-1} + 2 \cdot y \quad \frac{dPm}{dy} = -\frac{S}{y^2} + 2$$

Como buscamos el mínimo Perímetro mojado:

$$\frac{dPm}{dy} = 0 \quad -\frac{S}{y^2} + 2 = 0 \quad S = 2 \cdot y^2 \quad b \cdot y = 2 \cdot y^2$$

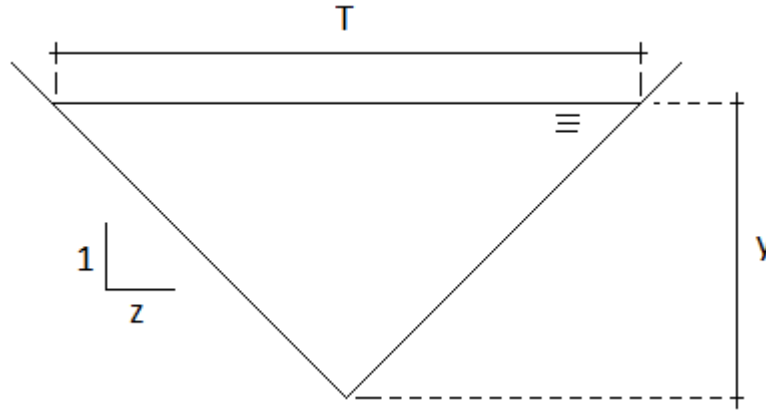
Por lo que las dimensiones óptimas serán:

$$\boxed{b = 2 \cdot y}$$

Con estas dimensiones obtendremos el mínimo perímetro mojado y, por lo tanto, el mayor radio hidráulico. Lo cual nos permite obtener unas pérdidas de carga por unidad de longitud mínimas.

4.1.2.2.- DEDUCIR CUÁL ES LA SECCIÓN MÁS FAVORABLE HIDRÁULICAMENTE DE UN CANAL TRIANGULAR

Sea una sección rectangular tal que:



Como el radio hidráulico es la relación entre la superficie y el perímetro mojado, vamos a minimizar este último para que, de este modo, el R_H sea máximo.

$$R_H = \frac{S}{P_{\text{mojado}}}$$

$$S = \frac{T \cdot y}{2} \quad T = 2 \cdot zy \quad S = zy^2 \quad z = \frac{S}{y^2}$$

$$P_{\text{mojado}} = 2y\sqrt{1+z^2} \quad Pm = 2y \sqrt{1 + \left(\frac{S}{y^2}\right)^2} = 2y \sqrt{1 + \frac{S^2}{y^4}}$$

El perímetro mojado varía según la altura de la lámina de agua:

$$Pm = 2y(1 + S^2 \cdot y^{-4})^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{Pm}{dy} = 2 \cdot (1 + S^2 \cdot y^{-4})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (1 + S^2 \cdot y^{-4})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4 \cdot S^2 \cdot y^{-5}) \cdot 2y$$

$$\frac{Pm}{dy} = 2 \left[1 + \frac{S^2}{y^4} - \frac{4yS^2}{y^5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{S^2}{y^4}} \right] \quad \frac{Pm}{dy} = 2 \left[1 + \frac{S^2}{y^4} - \frac{4S^2}{y^4 \left(1 + \frac{S^2}{y^4} \right)} \right]$$

$$\frac{Pm}{dy} = 2 \left[\sqrt{1 + \frac{S^2}{y^4}} - \frac{2S^2}{y^4 \left(1 + \frac{S^2}{y^4} \right)} \right]$$

Como buscamos el mínimo perímetro mojado:

$$\frac{dPm}{dy} = 0 \quad 2 \left[\sqrt{1 + \frac{S^2}{y^4}} - \frac{2S^2}{y^4 \left(1 + \frac{S^2}{y^4} \right)} \right] = 0$$

$$\sqrt{1 + \frac{S^2}{y^4}} - \frac{2S^2}{y^4 \left(1 + \frac{S^2}{y^4} \right)} = 0 \quad \sqrt{1 + \frac{S^2}{y^4}} = \frac{2S^2}{y^4 \left(1 + \frac{S^2}{y^4} \right)} \quad 1 + \frac{S^2}{y^4} = \frac{4S^4}{y^8 \left(1 + \frac{S^2}{y^4} \right)}$$

$$y^8 + S^2 y^4 = \frac{4S^4}{1 + \frac{S^2}{y^4}} \quad (y^8 + S^2 y^4) \left(1 + \frac{S^2}{y^4} \right) = 4S^4$$

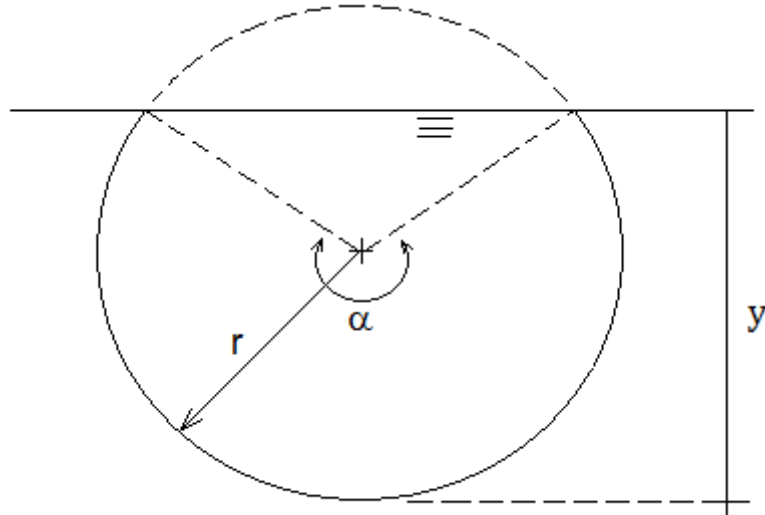
$$y^8 + S^2 y^4 + S^2 y^4 + S^4 = 4S^4 \quad y^8 + 2S^2 y^4 + S^4 = 4S^4$$

$$(y^4 + S^2)^2 = (2S^2)^2 \quad y^4 + S^2 = 2S^2 \quad y^4 = 2S^2 - S^2$$

$$y^4 = S^2 \quad y^2 = S \quad y^2 = zy^2 \quad \boxed{z = 1}$$

Por lo que la sección más favorable será aquella que forme un ángulo de 45° con la horizontal.

4.1.2.3.- DEDUCIR CUÁL ES LA SECCIÓN MÁS FAVORABLE HIDRÁULICAMENTE DE UN CANAL CIRCULAR



Expresando el ángulo en radianes obtenemos el área y el perímetro mojado:

$$A = \frac{r^2(\alpha - \sin(\alpha))}{2}$$

$$Pm = \alpha \cdot r$$

Por lo que, el radio hidráulico será:

$$R_H = \frac{A}{Pm} = \frac{\frac{r^2(\alpha - \sin(\alpha))}{2}}{\alpha \cdot r} = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right)$$

El calado que proporciona el radio hidráulico máximo corresponde al valor de α que hace mínima la expresión $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$.

La expresión $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$ es una ecuación trascendente, es decir, una ecuación que no se reduce a una ecuación algebraica mediante transformaciones algebraicas.

Esta, tiene varios mínimos que se pueden obtener resolviendo la ecuación $tg(\alpha) = \alpha$.

La solución obtenida por métodos numéricos es:

$$\alpha = 4.4934 \text{ rad}$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = -0.2172$$

Por tanto, el radio hidráulico máximo de una conducción circular será:

$$R_{H_{\max}} = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right) = \frac{r}{2} [1 - (-0.2172)] = r \left(\frac{1.2172}{2} \right) = 0.6084 \cdot r$$

→ Conducción circular a presión:

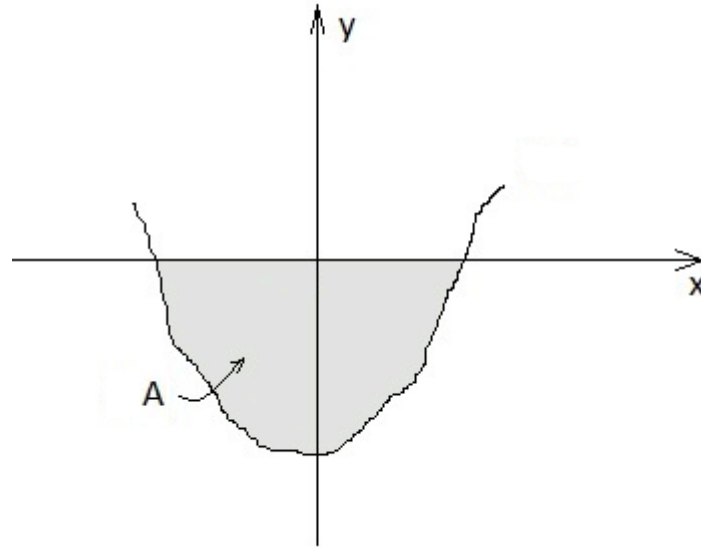
En el caso particular de las conducciones circulares trabajando con sección plena, es decir, a presión, el radio hidráulico en función del diámetro D es:

$$R_H = \frac{A}{Pm} = \frac{\frac{\pi \cdot D^2}{4}}{\pi \cdot D} = \frac{D}{4} = \frac{r}{2}$$

De lo anterior se deduce que el radio hidráulico a sección llena es el 82,2% del radio hidráulico máximo que puede proporcionar la sección circular:

$$\begin{array}{l} R_H = \frac{r}{2} = 0.5 \cdot r \\ R_{H_{\max}} = 0.6084 \cdot r \end{array} \quad \begin{array}{l} X \\ 100\% \end{array} \Bigg| \rightarrow R_H = 82,2\% \cdot R_{H_{\max}}$$

4.1.2.4.- DEDUCIR CUÁL ES LA SECCIÓN MÁS FAVORABLE HIDRÁULICAMENTE DE UN CANAL IRREGULAR



El ejemplo más claro de canal irregular son los canales naturales pero este caso no incluye sólo este tipo, sino que existen también canales construidos con secciones geométricas definidas, y que, en el transcurso del tiempo, por efecto de la erosión, se han transformado en irregulares y deben ser tratados como tales para obtener resultados de análisis correctos.

En estos casos se determina, durante visitas de campo, los tramos que se pueden considerar homogéneos con buena aproximación.

Después del levantamiento topográfico y batimétrico de la sección, se divide la misma en fajas verticales. Para cada faja vertical i se determina su área A_i , considerándolo un triángulo, o un trapecio. Se considera Pm_i al tramo de fondo correspondiente a cada faja.

De esta forma, el cálculo del área mojada y del perímetro mojado se realiza con las expresiones:

$$A = \sum_{i=1}^N A_i \qquad Pm = \sum_{i=1}^N Pm_i$$

Buscamos el mínimo Perímetro mojado:

$$\frac{dPm}{dy} = 0$$

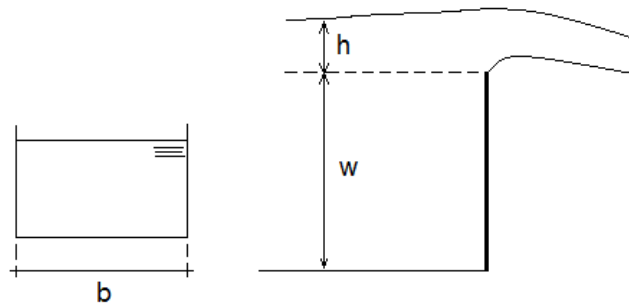
Al ser una sección irregular no podemos calcular de forma teórica el perímetro mojado por lo tanto no podemos hallar cuál sería la sección óptima.

4.1.3.- CAUDAL DESAGUADO POR VERTEDEROS RECTANGULARES

Vamos a realizar un estudio comparativo del caudal de salida, en un vertedero rectangular, con tres perfiles diferentes: pared delgada, pared gruesa y perfil tipo Creager.

Para este estudio, necesitaremos conocer determinados conceptos previos que podemos encontrar en el apartado 3.2.2.2.- *CLASIFICACIÓN SEGÚN LA PARED DE VERTIDO*.

4.1.3.1.- PARED DELGADA



En el vertedero de pared delgada, integramos directamente la fórmula del caudal para la altura de la lámina de agua:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad v = \sqrt{2gy}$$

$$V'(y) = C_d \cdot b \cdot \sqrt{2gy}$$

$$Q = \int_0^h V'(y) \cdot dy = \int_0^h C_d \cdot b \cdot \sqrt{2gy} \cdot dy = \left[C_d \cdot b \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2g} \cdot y^{\frac{3}{2}} \right]_0^h$$

$$Q = C_d \cdot b \cdot \frac{2}{3} h \cdot \sqrt{2gh}$$

El coeficiente de descarga C_d puede obtenerse de diversas maneras, para un vertedero rectangular.

- Mediante la ecuación:

$$C_d = 0.611 + 0.075 \cdot \frac{h}{w}$$

$$\text{Tomamos } h = 0.5w \quad C_d = 0.611 + 0.075 \cdot \frac{0.5w}{w} = 0.6485$$

Entonces:

$$Q = 0.6485 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2g} \cdot b \cdot h \cdot \bar{h} = 1.915 \cdot b \cdot h^{\frac{3}{2}}$$

$$Q = 1.915 \cdot b \cdot h^{\frac{3}{2}}$$

- Mediante la siguiente tabla podemos obtener el valor de k, siendo k:

$$k = C_d \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2g} \rightarrow Q = k \cdot b \cdot h^{\frac{3}{2}}$$

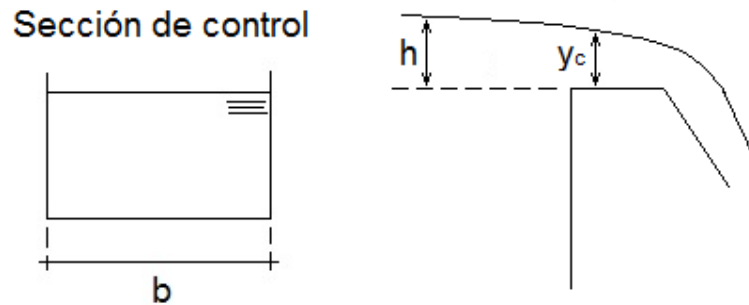
w/h	h=0.05	h=0.10	h=0.20	h=0.40	h=0.60	h=0.80	h=1.00	h=1.50
0.5	2.316	2.285	2.272	2.266	2.263	2.262	2.262	2.261
1.0	2.082	2.051	2.037	2.030	2.027	2.026	2.025	2.024
2.0	1.964	1.933	1.919	1.912	1.909	1.908	1.907	1.906
10.0	1.870	1.839	1.824	1.817	1.815	1.814	1.813	1.812
\infty	1.846	1.815	1.801	1.793	1.791	1.790	1.789	1.788

Tomamos $h = 0.5w$ $w/h = 2$ Como en la tabla no se considera h para el valor $h = 0.5$, hacemos la media entre los valores correspondientes a $h = 0.4$ y $h = 0.6$, para $w/h = 2$:

$$k = \frac{1.912 + 1.909}{2} = 1.9105$$

$$Q = 1.905 \cdot b \cdot h^{\frac{3}{2}}$$

4.1.3.2.- PARED GRUESA



Como pasamos de un régimen lento a uno rápido, existe una sección que se encuentra en régimen crítico, a la que llamamos *sección de control*.

Régimen crítico: cuando la velocidad es igual que la raíz cuadrada de la gravedad por la profundidad.

$$v = \sqrt{g \cdot y_c}$$

Por lo tanto, el caudal de salida será:

$$Q = A \cdot v = b \cdot y_c \cdot \sqrt{g \cdot y_c}$$

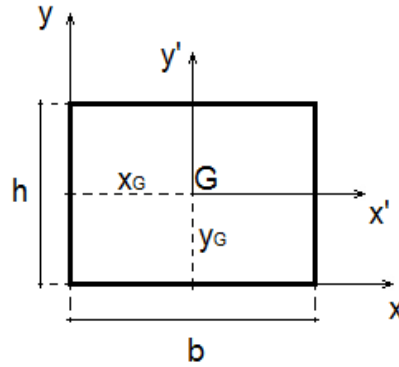
Donde y_c será la ordenada del centro de presión, que calcularemos mediante el teorema de Varignon y resulta:

$$y_c = y_G + \frac{I_G}{y_G \cdot A}$$

Donde y_G es la distancia que hay, desde el eje de abscisas, hasta el centro de gravedad. Es decir, la coordenada y del centro de gravedad. E I_G es el momento de inercia de la sección y A su superficie.

Teorema de Varignon: el momento respecto a un punto o a un eje, de la resultante de un sistema de fuerzas, es igual a la suma de los momentos producidos por cada fuerza, respecto al mismo punto o eje.

El momento de inercia de un rectángulo con respecto a un eje que pasa por su centro de gravedad es:



$$x_G = \frac{b}{2} \quad y_G = \frac{h}{2} \quad A = b \cdot h \quad I_G = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$

Por tanto, para una sección rectangular, y_c será:

$$y_c = y_G + \frac{I_G}{y_G \cdot A} = \frac{h}{2} + \frac{\frac{1}{12} b \cdot h^3}{\frac{h}{2} \cdot b \cdot h} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{3h + h}{6} = \frac{4}{6} h$$

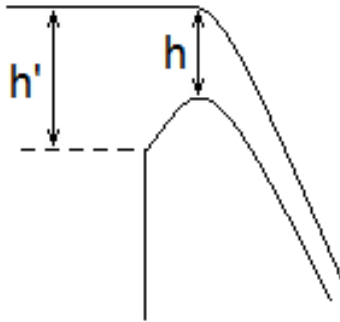
$$y_c = \frac{2}{3} h$$

$$\left. \begin{array}{l} Q = b \cdot y_c \cdot \sqrt{g \cdot y_c} \\ y_c = \frac{2}{3} h \end{array} \right\} \rightarrow Q = b \cdot \frac{2}{3} h \cdot \sqrt{g \cdot \frac{2}{3} h}$$

$$Q = \frac{1}{3} \cdot b \cdot \frac{2}{3} h \cdot \sqrt{2gh}$$

$$Q = 1.705 \cdot b \cdot h^{\frac{3}{2}}$$

4.1.3.3.- PERFIL DE TIPO CREAGER



Como ya hemos visto en el apartado 1, el caudal sería:

$$Q = 1.905 \cdot b \cdot h'^{\frac{3}{2}}$$

Tomamos $h' = n \cdot h$:

$$Q = 1.905 \cdot b \cdot h'^{\frac{3}{2}} = 1.905 \cdot b \cdot (n \cdot h)^{\frac{3}{2}} = k \cdot b \cdot h^{\frac{3}{2}}$$

Donde k [2.10; 2.35]. Tomaremos el menor valor, por seguridad:

$$K = 2.1$$

Quedando, nuestra ecuación, de la siguiente manera:

$$Q = 2.1 \cdot b \cdot h^{\frac{3}{2}}$$

En los 3 casos que hemos estudiado, podemos observar que el caudal desaguado depende siempre de:

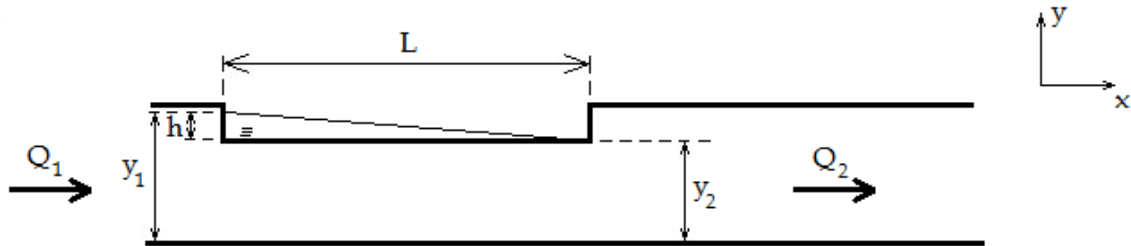
- la anchura del vertedero
- la altura de la lámina de agua sobre el vertedero elevado a $3/2$
- una determinada constante, que toma el valor máximo para el perfil de tipo Creager.

Con esto, podemos deducir, que el vertedero con perfil de tipo Creager es el que desagua el mayor caudal para una altura prefijada. De ahí que, este tipo de vertedero, sea el más usado. Sin olvidar que, en este caso, la altura de la lámina de agua está referida a un punto diferente del resto.

Por otro lado, si comparamos los resultados obtenidos en este estudio con las ecuaciones de patronamiento citadas en el apartado 3.2.2.2.- *CLASIFICACIÓN SEGÚN LA PARED DE VERTIDO*, es fácil observar que, para cada tipo de perfil, las ecuaciones son muy similares y, por ello, podemos afirmar que los resultados obtenidos en este estudio se encuentran dentro del patrón de cada uno de los perfiles estudiados.

4.1.4.- DIMENSIONAMIENTO DE UN ALIVIADERO

Vamos a determinar el valor de la longitud L de un aliviadero en el canal de la figura, en función del caudal Q y la altura del agua h .



El caudal a verter será la diferencia entre el caudal de entrada y el de salida, es decir:

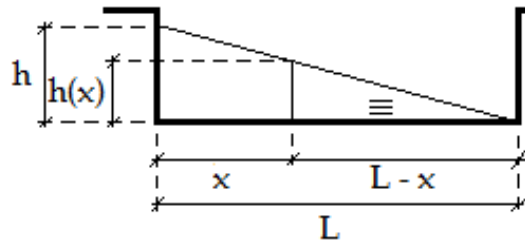
$$Q = Q_1 - Q_2$$

Dependiendo del aliviadero, encontraremos unas condiciones u otras, así que, determinamos un tipo de aliviadero para poder obtener resultados más concretos. Elegimos, por ejemplo, un aliviadero con perfil Creager. Para ello, utilizaremos los datos obtenidos en el apartado 4.1.3.3.- *PERFIL DE TIPO CREAGER*:

$$Q = 2.1 \cdot b \cdot h^{\frac{3}{2}}$$

Si suponemos una variación lineal desde el punto de entrada hasta el de salida:

$$dQ = 2.1 \cdot dx \cdot (h(x))^{\frac{3}{2}}$$



Podemos comprobar en la figura anterior que:

$$\frac{h(x)}{L-x} = \frac{h}{L} \quad h(x) = \frac{h}{L}(L-x)$$

Sustituyendo queda:

$$dQ = 2.1 \left(\frac{h}{L}(L-x) \right)^{3/2} \cdot dx$$

$$Q = 2.1 \int_0^L \left(\frac{h}{L} \right)^{3/2} \cdot (L-x)^{3/2} \cdot dx = 2.1 \left(\frac{h}{L} \right)^{3/2} \cdot \frac{L^{5/2}}{5/2}$$

$$L = \frac{Q}{\frac{2}{5} \cdot 2.1 \cdot h^{3/2}} \quad L = \frac{Q}{0.84 \cdot h^{3/2}}$$

Hay que tener en cuenta que el coeficiente de desagüe que hemos utilizado es el máximo teórico para este tipo de perfil, por lo que, en aplicaciones prácticas, sería conveniente tomar un valor algo inferior.

4.2.- ANÁLISIS DEL ESTUDIO TEÓRICO

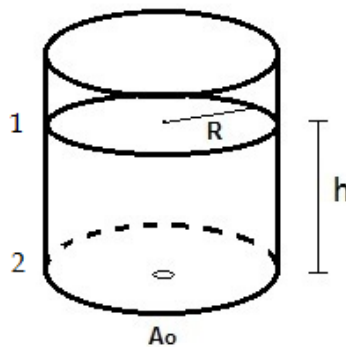
A continuación, procederemos al análisis de una serie de casos específicos para comprobar así la validez del estudio anteriormente realizado.

4.2.1.- ESTUDIO DE LA VELOCIDAD DE SALIDA DEL AGUA EN UN DEPÓSITO

Como ya hemos visto en el apartado 3.3.3.- *HIDRODINÁMICA* de la parte teórica, según la ecuación de Torricelli, al considerar en un depósito la velocidad de la superficie del agua despreciable, obtenemos que la velocidad de salida por un orificio es:

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Siendo un depósito cualquiera con las siguientes consideraciones:



Utilizando el *teorema de la conservación de la energía mecánica*, podemos obtener la ecuación de Torricelli, despreciando la velocidad de la superficie del agua:

$$mgh = \frac{1}{2}m \cdot v_2^2 \quad v_2 = \sqrt{2gh}$$

Vamos a comprobar qué ocurriría al considerar la velocidad de la superficie del agua:

$$\rho gh + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \quad v_2^2 = 2gh + v_1^2$$

Donde:

$$v_1 = h'$$

Por tanto:

$$v_2 = \sqrt{2gh + (h')^2}$$

Sustituimos la nueva velocidad en la ecuación de variación del volumen del depósito:

$$\left. \begin{array}{l} V' = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh + (h')^2} \\ V' = A(h) \cdot h' \end{array} \right\} \Rightarrow A(h) \cdot h' = C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh + h'^2}$$

$$A(h)^2 \cdot (h')^2 = C^2 \cdot A_0^2 \cdot (2gh + (h')^2)$$

$$A(h)^2 \cdot (h')^2 = C^2 \cdot A_0^2 \cdot 2gh + C^2 \cdot A_0^2 \cdot (h')^2$$

$$A(h)^2 \cdot (h')^2 - C^2 \cdot A_0^2 \cdot (h')^2 = C^2 \cdot A_0^2 \cdot 2gh$$

$$(h')^2 \cdot (A(h)^2 - C^2 \cdot A_0^2) = C^2 \cdot A_0^2 \cdot 2gh$$

$$h' = \sqrt{\frac{C^2 \cdot A_0^2 \cdot 2gh}{A(h)^2 - C^2 \cdot A_0^2}}$$

$$h' = -C \cdot A_0 \sqrt{\frac{2gh}{A(h)^2 - C^2 \cdot A_0^2}}$$

Consideramos el valor de h' como negativo ya que éste decrece a medida que aumenta el tiempo.

Por el resultado obtenido, podemos afirmar que los errores cometidos, al considerar la velocidad de la altura de agua como nula, son despreciables si el área de dicha superficie es considerablemente mayor que el área del orificio de salida A_0 .

4.2.2.- APLICACIÓN DEL PROGRAMA MÁXIMA AL TIEMPO DE VACIADO DE DEPÓSITOS

A continuación, procederemos a un análisis conciso del estudio realizado con anterioridad para determinados depósitos, y, de esta manera, comprobar si se cumplen las ecuaciones expuestas con anterioridad para calcular el tiempo de vaciado de diferentes depósitos.

4.2.2.1.- PROGRAMACIÓN DE MÁXIMA

Para comenzar con el estudio, lo primero que necesitamos es programar los métodos Runge-Kutta, que vamos a utilizar, en el programa *Máxima*. Para ello, necesitamos insertar una serie de códigos para cada uno de los programas.

- **PROGRAMA RUNGE-KUTTA 2**

Insertamos el siguiente código en el programa *Máxima*:

```
→ rungekutta2 (f, t, t0, y, y0, c, n):=
  block (
    [tn:t0, yn:y0, i, h:(c - t0)/n, k1, k2],
    for i:1 thru n do
    (
      k1:h*ev(f, t=tn, y=yn),
      k2:h*ev(f, t=tn+h, y=yn+k1),
      yn:float(yn+(k1+k2)/2),
      tn:tn+h),
    yn) $
```

Al ejecutar *rungekutta2* (f, t, t_0, y, y_0, c, n) estaremos aplicando el método de Runge-Kutta de orden 2 a la ecuación $y' = f$ (donde f es una expresión), con condición de Cauchy, $y(t_0) = y_0$, y buscando el valor de $y(c)$ dando n pasos.

▪ PROGRAMA RUNGE-KUTTA 3

```
→ rungekutta3(f, t, t0, y, y0, c, n):=
  block(
    [tn:t0, yn:y0, i, h:(c-t0)/n, k1, k2],
    for i:1 thru n do
      (
        k1:h*ev(f, t=tn, y=yn),
        k2:h*ev(f, t=tn+h/2, y=yn+k1/2),
        k3:h*ev(f, t=tn+h, y=yn-k1+2*k2),
        yn:float(yn+1/6*(k1+4*k2+k3)),
        tn:tn+h),
    yn) $
```

▪ PROGRAMA RUNGE-KUTTA 4

```
→ rungekutta4(f, t, t0, y, y0, c, n):=
  block(
    [tn:t0, yn:y0, i, h:(c-t0)/n, k1, k2],
    for i:1 thru n do
      (
        k1:h*ev(f, t=tn, y=yn),
        k2:h*ev(f, t=tn+h/2, y=yn+k1/2),
        k3:h*ev(f, t=tn+h/2, y=yn+k2/2),
        k4:h*ev(f, t=tn+h, y=yn+k3),
        yn:float(yn+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)),
        tn:tn+h),
    yn) $
```

4.2.2.2.- VACIADO DE DEPÓSITOS MEDIANTE MÁXIMA

Para realizar este estudio, utilizaremos las ecuaciones obtenidas en el apartado 4.1.1.- *TIEMPO DE VACIADO DE DEPÓSITOS*.

- **DEPÓSITO CILÍNDRICO:**

$$\begin{aligned} R &= 1 \text{ m} \\ H &= 1 \text{ m} \\ A_0 &= 0.005 \text{ m}^2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

La ecuación diferencial en este caso es:

$$\pi R^2 \cdot h' = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh}$$

Para la situación inicial:

$$h(0) = 1$$

El depósito de debe vaciar en el instante:

$$t = \frac{\pi R^2 \cdot \sqrt{2gH}}{A_0 \cdot g}$$

```
→ expand(rungekutta4(-0.005*sqrt(2*9.81*y))/(%pi), t, 0, y, 1.0,
(sqrt(2*9.81)*%pi)/(9.81*0.005), 10000));
```

```
(%o29) -3.1329404605765793*10^-9%i-2.4436879446690005*10^-10
```

Nos da un valor muy cercano a 0.

Salen números complejos debido a que, por el error del método numérico, al acercarse la altura a 0, en un momento, se ha hecho negativa y por ello aparecen raíces de números negativos.

Observemos que, si quitamos una décima de segundo, nos daría una altura positiva y pequeña:

```
→ expand(rungekutta4(-0.005*sqrt(2*9.81*y)/(%pi), t, 0, y, 1.0,
(sqrt(2*9.81)*%pi)/(9.81*0.005)-0.1, 10000));
```

```
(%o30) 1.2426154034256289*10^-7
```

▪ **DEPÓSITO CÓNICO:**

$$\begin{aligned} R &= 1 \text{ m} \\ H &= 1 \text{ m} \\ A_0 &= 0.005 \text{ m}^2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

La ecuación diferencial en este caso es:

$$\pi \left(\frac{R \cdot h}{H} \right)^2 \cdot h' = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g \cdot h} \quad h' = -\frac{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g \cdot h}}{\frac{\pi \cdot R^2 \cdot h^2}{H^2}}$$

$$h' = -\frac{C \cdot A_0 \cdot H^2 \sqrt{2g \cdot h}}{\pi \cdot R^2 \cdot h^2}$$

Y el tiempo de vaciado es:

$$t = \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot \bar{H}}{5 \cdot \sqrt{2g} \cdot C \cdot A_0}$$

Introduciendo los datos en *Máxima*, obtenemos un tiempo de vaciado de:

→ `float(2*%pi/(5*sqrt(2*9.81)*0.005));`

`(%o34) 56.74013413771549`

Ahora comprobamos cuál sería la altura del agua para ese tiempo:

→ `expand(rungekutta4(-0.005*sqrt(2*9.81)/(%pi*y^(3/2)), t, 0, y, 1.0, 2*%pi/(5*sqrt(2*9.81)*0.005), 10000));`

`(%o31) 0.0050411902296228`

Nos da un valor muy próximo a 0.

▪ **DEPÓSITO TRAPEZOIDAL:**

$$\begin{aligned} L &= 1 \text{ m} \\ b &= 1 \text{ m} \\ B &= 2 \text{ m} \\ H &= 1 \text{ m} \\ A_0 &= 0.005 \text{ m}^2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

La ecuación diferencial en este caso es:

$$h'(t) = \frac{-C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh}}{\left(\frac{h \cdot (B - b)}{H} + b\right) \cdot L}$$

Y el tiempo de vaciado es:

$$t = \frac{L \cdot \overline{H} \left(\frac{2}{3}B + \frac{4}{3}b \right)}{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}$$

Introduciendo los datos en *Máxima*, obtenemos un tiempo de vaciado de:

→ float(8/(3*0.005*sqrt(2*9.81)));

(%o13) 120.4063042628616

Ahora comprobamos cuál sería la altura del agua para ese tiempo:

→ expand(rungekutta4(-0.005*sqrt(2*9.81*y)/(y+1), t, 0, y, 1.0, 8/(3*0.005*sqrt(2*9.81)), 10000));

(%o8) -5.5696718116128159*10^-9%i-4.3443348995640278*10^-10

▪ **DEPÓSITO DE FORMA ESFÉRICA:**

$$\begin{aligned} R &= 1 \text{ m} \\ A_0 &= 0.005 \text{ m}^2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

La ecuación diferencial en este caso es:

$$\pi(2Rh - h^2) \cdot h' = -C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g \cdot h} \quad h' = -\frac{C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g \cdot h}}{\pi(2Rh - h^2)}$$

Y el tiempo de vaciado es:

$$t = \frac{14 \pi \cdot R^{5/2}}{15 \cdot C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}}$$

Introduciendo los datos en *Máxima*, obtenemos un tiempo de vaciado de:

→ `float(14*%pi/(15*0.005*sqrt(2*9.81)));`

`(%o38) 132.3936463213362`

Ahora comprobamos cuál sería la altura del agua para ese tiempo:

→ `expand(rungekutta4(-0.005*sqrt(2*9.81*y)/(14*%pi*(2*y-y^2)), t, 0.0, y, 1.0, 14*%pi/(15*0.005*sq`

`(%o32) 3.9452772181056877*10^-5`

Como conclusión del análisis realizado, podemos afirmar que las ecuaciones halladas son correctas ya que, una vez incluido los datos, el valor de la altura del agua, una vez transcurrido el tiempo t de vaciado, es muy próxima a 0 en todos los casos. Por lo tanto, cada uno de los depósitos se vacía, de manera aproximada, en el tiempo que habíamos determinado.

4.2.2.3.- VACIADO DE DEPÓSITOS MEDIANTE MÁXIMA CONSIDERANDO LA VELOCIDAD SUPERFICIAL

Como ya hemos visto en el apartado 4.2.1.- *ESTUDIO DE LA VELOCIDAD DE SALIDA DEL AGUA EN UN DEPÓSITO*, si consideramos válida la velocidad de la superficie del agua, la velocidad de salida será:

$$v_2 = \sqrt{2gh + (h')^2}$$

Por lo que, como ya hemos visto:

$$A(h) \cdot h' = C \cdot A_0 \cdot \sqrt{2gh + h'^2}$$

Donde, despejando h' , y teniendo en cuenta que tiene que su valor tiene que ser negativo, ya que disminuye en función del tiempo, obtenemos que:

$$h' = -C \cdot A_0 \sqrt{\frac{2gh}{A(h)^2 - C^2 \cdot A_0^2}}$$

Veamos qué pasaría si consideramos este valor de h' en los ejemplos anteriores.

▪ **DEPÓSITO CILÍNDRICO:**

$$\begin{aligned} R &= 1 \text{ m} \\ H &= 1 \text{ m} \\ A_0 &= 0.005 \text{ m}^2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

La ecuación diferencial en este caso es:

$$\left. \begin{aligned} h' &= -C \cdot A_0 \sqrt{\frac{2gh}{A(h)^2 - C^2 \cdot A_0^2}} \\ A(h) &= \pi \cdot R^2 \end{aligned} \right\}$$

$$h' = -1 \cdot 0.005 \sqrt{\frac{2gh}{(\pi \cdot R^2)^2 - 1^2 \cdot 0.005^2}} = -1 \cdot 0.005 \sqrt{\frac{2gh}{(\pi \cdot 1^2)^2 - 1^2 \cdot 0.005^2}}$$

$$h' = -0.005 \cdot \sqrt{\frac{2gh}{\pi^2 - 0.005^2}}$$

Veamos qué pasaría si consideramos el mismo tiempo de vaciado:

$$t = \frac{\pi R^2 \cdot \sqrt{2gH}}{A_0 \cdot g}$$

→ `expand(rungekutta4(-0.005*sqrt(2*9.81*y/(%pi^2-0.005^2)), t, 0, y, 1.0, (sqrt(2*9.81)*%pi)/(9.81*0.005), 10000));`

`(%o33) -3.2841901875950173*10^-9%i-8.7854427121624826*10^-11`

De nuevo nos da un valor muy próximo a 0 (por el error que se comete, sale un número complejo, al igual que antes).

▪ **DEPÓSITO CÓNICO:**

$$\begin{aligned} R &= 1 \text{ m} \\ H &= 1 \text{ m} \\ A_0 &= 0.005 \text{ m}^2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

La ecuación diferencial en este caso es:

$$h' = -C \cdot A_0 \sqrt{\frac{2gh}{A(h)^2 - C^2 \cdot A_0^2}}$$

Donde:

$$A(h) = \pi \cdot (r(h))^2 \quad r(h) = \frac{R \cdot h}{H}$$

$$A(h) = \pi \cdot (r(h))^2 = \pi \cdot \left(\frac{R \cdot h}{H}\right)^2 = \pi \cdot \frac{R^2 \cdot h^2}{H^2}$$

Así que:

$$h' = -C \cdot A_0 \sqrt{\frac{2gh}{\left(\pi \cdot \frac{R^2 \cdot h^2}{H^2}\right)^2 - C^2 \cdot A_0^2}} = -C \cdot A_0 \sqrt{\frac{2gh}{\pi^2 \cdot \frac{R^4 \cdot h^4}{H^4} - C^2 \cdot A_0^2}}$$

$$h' = -1 \cdot 0.005 \sqrt{\frac{2gh}{\pi^2 \cdot \frac{1^4 \cdot h^4}{1^4} - 1^2 \cdot 0.005^2}}$$

$$h' = -0.005 \sqrt{\frac{2gh}{\pi^2 \cdot h^4 - 0.005^2}}$$

El tiempo de vaciado, despreciando la velocidad superficial, era:

(%o34) 56.74013413771549

Vamos a usar de nuevo Runge-Kutta de orden 4, pero vamos a variar un poco el programa para que, en cuanto la altura deje de ser positiva, se detenga, y así tendremos una estimación del tiempo de vaciado evitando, además, los cálculos con números complejos.

→ **rungekutta4var(f,t,t0,y,y0,c,n):=**

```

block(
  [tn:t0,yn:y0,i,h:(c-t0)/n,k1,k2],
  for i:1 thru n do
  (
    k1:h*ev(f,t=tn,y=yn),
    k2:h*ev(f,t=tn+h/2,y=yn+k1/2),
    k3:h*ev(f,t=tn+h/2,y=yn+k2/2),
    k4:h*ev(f,t=tn+h,y=yn+k3),
    yn:float(yn+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)),
    tn:tn+h,
    if not yn>=0 then (print("Tiempo de vaciado igual a
",float(tn)),i:n)),
  0)$

```

Aplicamos ahora el Runge-Kutta de orden 4 variado con los datos del depósito:

```
→ rungekutta4var(-0.005*sqrt(2*9.81*y/(%pi^2*y^4-0.005^2)),t,0,y,1.0,56.74,10000);
```

Tiempo de vaciado = 56.71162999999446

En el caso de la velocidad superficial despreciable, no teníamos este problema; en ninguna evaluación salían números negativos a los que hacer la raíz. Sin embargo, en este caso, llegaríamos al vaciado casi 3 centésimas de segundo antes; como podemos observar si comparamos los dos resultados anteriores.

Esto se debe a que la velocidad de la superficie del agua, en el caso del cono, si bien es despreciable al principio, conforme bajamos, va aumentando, debido a que el área del agujero deja de ser despreciable respecto al área de la superficie del agua. Así que, la diferencia, que no es muy grande, empieza a ser apreciable.

▪ **DEPÓSITO TRAPEZOIDAL:**

$$\begin{aligned} L &= 1 \text{ m} \\ b &= 1 \text{ m} \\ B &= 2 \text{ m} \\ H &= 1 \text{ m} \\ A_0 &= 0.005 \text{ m}^2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

La ecuación diferencial en este caso es:

$$h' = -C \cdot A_0 \sqrt{\frac{2gh}{A(h)^2 - C^2 \cdot A_0^2}}$$

Donde:

$$A(h) = L \cdot x(t) \quad x(t) = \frac{h \cdot (B - b)}{H} + b$$

Por lo tanto:

$$h' = -C \cdot A_0 \sqrt{\frac{2gh}{\left[L \cdot \left(\frac{h \cdot (B - b)}{H} + b \right) \right]^2 - C^2 \cdot A_0^2}}$$

El tiempo de vaciado, despreciando la velocidad superficial, era:

(%o13) 120.4063042628616

Veamos cuánto es el tiempo de vaciado en este caso, en el que no consideramos despreciable la velocidad superficial:

→ `expand(rungekutta4var(-0.005*sqrt(2*9.81*y/((y+1)^2-0.005^2)), t, 0, y, 1.0, 8/(3*0.005*sqrt(2*9.81)), 10000));`

Tiempo de vaciado = 120.4063042628505

La diferencia entre los dos tiempos resulta muy pequeña.

▪ **DEPÓSITO TRAPEZOIDAL CON MAYOR A_0 :**

Veamos ahora qué ocurre, en el caso del cilindro, si aumentamos el área del orificio de salida del agua.

$$\begin{aligned} L &= 1 \text{ m} \\ b &= 1 \text{ m} \\ B &= 2 \text{ m} \\ H &= 1 \text{ m} \\ A_0 &= 0.2 \text{ m}^2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

El tiempo de vaciado, considerando la velocidad superficial despreciable, para las nuevas dimensiones del orificio es de:

→ `float(8/(3*0.2*sqrt(2*9.81)));`

`(%o21) 3.010157606571539`

Y según nuestro programa, si no consideramos la velocidad superficial despreciable, para las nuevas dimensiones del orificio, nos saldría un tiempo de:

→ `expand(rungekutta4var(-0.2*sqrt(2*9.81*y/((y+1)^2-0.2^2)), t, 0, y, 1.0, 8/(3*0.2*sqrt(2*9.81))+1, 10000));`

Tiempo de vaciado = `2.974333896794439`

En este caso, la diferencia ya ha aumentado a unas 4 centésimas, que es un error de poco más del 1%.

▪ **DEPÓSITO DE FORMA ESFÉRICA:**

$$\begin{aligned} R &= 1 \text{ m} \\ A_0 &= 0.005 \text{ m}^2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

La ecuación diferencial en este caso es:

$$h' = -C \cdot A_0 \sqrt{\frac{2gh}{A(h)^2 - C^2 \cdot A_0^2}}$$

Donde:

$$A(h) = \pi(r(h))^2 \quad r(h) = \sqrt{2Rh - h^2}$$

$$A(h) = \pi(\sqrt{2Rh - h^2})^2 = \pi(2Rh - h^2)$$

Así que:

$$h' = -C \cdot A_0 \sqrt{\frac{2gh}{(\pi(2Rh - h^2))^2 - C^2 \cdot A_0^2}} = -C \cdot A_0 \sqrt{\frac{2gh}{\pi^2(2Rh - h^2)^2 - C^2 \cdot A_0^2}}$$

$$h' = -1 \cdot 0.005 \sqrt{\frac{2gh}{\pi^2(2 \cdot 1h - h^2)^2 - 1^2 \cdot 0.005^2}}$$

$$h' = -0.005 \sqrt{\frac{2gh}{\pi^2(2h - h^2)^2 - 0.005^2}}$$

El tiempo de vaciado, despreciando la velocidad superficial, era:

(%o38) 132.3936463213362

Veamos cuánto es el tiempo de vaciado en este caso:

→ expand(rungekutta4var(-0.005*sqrt(2*9.81*y/(%pi^2*(2*y-y^2)^2-0.005^2)), t, 0.0, y, 1.0, 140, 10000));

Tiempo de vaciado = 132.3839999999894

Nos dice que se vacía una centésima de segundo antes. Hay que observar que, antes, el método numérico, por el error que comete, nos decía que aún quedaba un poco de agua. En este caso, una centésima de segundo antes, el depósito se ha vaciado por completo.

▪ **DEPÓSITO CILÍNDRICO CON MAYOR A_0 :**

Veamos ahora qué ocurre, en el caso del cilindro, si aumentamos el área del orificio de salida del agua.

$$\begin{aligned} R &= 1 \text{ m} \\ H &= 1 \text{ m} \\ A_0 &= 0.5 \text{ m}^2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Considerando despreciable la velocidad superficial nos saldría que el tiempo de vaciado es:

→ `float((sqrt(2*9.81)*%pi)/(9.81*0.5));`

`(%o42) 2.837006706885775`

Y la altura del agua, para ese tiempo, nos dará prácticamente 0:

→ `expand(rungekutta4(-0.5*sqrt(2*9.81*y)/(%pi), t, 0, y, 1.0, (sqrt(2*9.81)*%pi)/(9.81*0.5), 10000));`

`(%o43) -3.1329404605726105*10^-9%i-2.4436879446902425*10^-10`

Sin embargo, si tenemos en cuenta la velocidad superficial, los datos variarán considerablemente.

Veamos cuándo se vacía el depósito:

→ `expand(rungekutta4var(-0.5*sqrt(2*9.81*y/(%pi^2-0.5^2)), t, 0, y, 1.0, 2.9, 10000));`

Tiempo de vaciado = 2.800820000000039

Como vemos, en este caso el error es de 3 centésimas y, teniendo en cuenta que el tiempo es menor de 3 segundos, este error supera el 1%. Si el agujero es más grande, el error que se obtiene es mayor.

Por ejemplo, si $A_0 = 1 \text{ m}^2$, despreciando la velocidad superficial, el tiempo de vaciado que nos sale es:

```
→ float((sqrt(2*9.81)*%pi)/(9.81));
```

```
(%o45) 1.418503353442888
```

El método numérico lo confirma:

```
→ expand(rungekutta4(-sqrt(2*9.81*y)/(%pi), t, 0, y, 1.0,
(sqrt(2*9.81)*%pi)/(9.81), 10000));
```

```
(%o46) -3.1329404605726105*10^-9*i-2.4436879446902425*10^-10
```

Sin embargo, considerando la velocidad superficial, vemos que el tiempo, en realidad, es algo menor:

```
→ expand(rungekutta4var(-sqrt(2*9.81*y/(%pi^2-1)), t, 0, y, 1.0, 2.9,
10000));
```

Tiempo de vaciado = 1.34472999999992

```
(%o47) 0
```

El error cometido en este caso supera el 5%.

5.- CONCLUSIONES

Tras los diferentes estudios realizados, obtenemos una serie de conclusiones que exponemos a continuación, individualizadas, para cada uno de los análisis realizados.

▪ TIEMPO DE VACIADO DE DEPÓSITOS

En los cinco tipos de depósitos con los que hemos trabajado, podemos observar, cómo el tiempo que tarda cada depósito en vaciarse depende, en todos ellos, de las dimensiones concretas de cada uno de los depósitos, de la aceleración de la gravedad, del área de la abertura por la que sale el fluido y, por último, del coeficiente de caudal específico en cada caso.

Por tanto, para variar el tiempo de vaciado según nuestras necesidades, bastará con cambiar alguno de estos parámetros y, así, obtener el caudal de salida deseado para cada tiempo.

▪ SECCIÓN ÓPTIMA DE UN CANAL

El objetivo de este estudio es conseguir maximizar el radio hidráulico de cada sección para obtener unas pérdidas de carga por unidad de longitud mínimas.

Para maximizar el radio hidráulico de cada una de las secciones necesitaremos, en todos los casos, minimizar el perímetro mojado y, así, reducir al máximo las pérdidas de carga y, por tanto, cumplir nuestro objetivo.

▪ CAUDAL DESAGUADO POR VERTEDEROS RECTANGULARES

En los 3 casos que hemos estudiado, podemos observar que el caudal desaguado depende siempre de:

- la anchura del vertedero.
- la altura de la lámina de agua sobre el vertedero elevado a $3/2$.
- una determinada constante, que toma el valor máximo para el perfil de tipo Creager.

Con esto, podemos deducir, que el vertedero con perfil de tipo Creager es el que desagua el mayor caudal para una altura prefijada. De ahí que, este tipo de vertedero, sea el más usado. Sin olvidar que, en este caso, la altura de la lámina de agua está referida a un punto diferente del resto.

Por otro lado, si comparamos los resultados obtenidos en este estudio con las ecuaciones de patronamiento citadas en el apartado 3.2.2.2.- *CLASIFICACIÓN SEGÚN LA PARED DE VERTIDO*, es fácil observar que, para cada tipo de perfil, las ecuaciones son muy similares y, por ello, podemos afirmar que los resultados obtenidos en este estudio se encuentran dentro del patrón de cada uno de los perfiles estudiados.

▪ DIMENSIONAMIENTO DE UN ALIVIADERO

El objetivo de este estudio era determinar el valor de la longitud L de un aliviadero en un canal determinado, en función del caudal Q y la altura del agua h .

El resultado obtenido de la longitud del aliviadero se encuentra en función del caudal y del calado. Si comparamos este resultado con los del apartado anterior, los del caudal desaguado por distintos vertederos, vemos que son similares ya que, en el caso de los vertederos, el caudal dependía del calado y de un parámetro dimensional del vertedero, b , y en el caso del aliviadero, al despejar el caudal en la ecuación, vemos que éste depende también únicamente del calado y de un parámetro dimensional del aliviadero, en este caso, L .

- **VELOCIDAD DE SALIDA EN UN DEPÓSITO Y APLICACIÓN DE MÁXIMA**

Tras el estudio realizado, hemos obtenido diversas conclusiones:

Respecto a la consideración de la velocidad superficial en diversos depósitos, podemos concluir que la afirmación de Torricelli de considerar en un depósito la velocidad de la superficie del agua despreciable, es cierta, siempre y cuando, el área de dicha superficie sea considerablemente mayor que el área del orificio de salida, A_0 .

Sin embargo, como hemos podido apreciar bien en el caso del cono, aunque la velocidad superficial es despreciable en un principio, conforme la altura del agua disminuye, el área de dicha superficie también disminuye, provocando un incremento en la velocidad superficial, la cual, deja de ser despreciable para comenzar a tener un peso considerable en los datos obtenidos.

Esto es debido a que la diferencia entre el área superficial y el área del orificio de salida no es tan grande como lo era en un principio.

Por todo ello, podemos afirmar que los errores son despreciables sí, y sólo sí, el área de la superficie del agua es considerablemente mayor que el área del orificio de salida.

6.- BIBLIOGRAFÍA

Material didáctico:

- Fundamentos Matemáticos:
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS – Carlos Angosto Hernández
MÉTODOS NUMÉRICOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS – Carlos Angosto Hernández.
- Fundamentos Hidráulicos:
HIDRÁULICA DE CANALES ABIERTOS – Ven Te Chow
APUNTES DE HIDRÁULICA - Francisco José Marzal Martínez
- Problemas de obras hidráulicas:
PROBLEMAS DE OBRAS HIDRÁULICAS, 2ª edición – Fernando Delgado Ramos. Joaquín Delgado García.
- Historia de la construcción civil:
<http://historiacivil.wordpress.com>
- Tipos de vertederos:
<http://www.fao.org/docrep/t0848s/t0848s06.htm>
- Historia del Canal de Castilla:
<http://centros5.pntic.mec.es/ies.sem.tob/historia.htm>
- Clasificación de vertederos:
http://es.wikipedia.org/wiki/Vertedero_hidr%C3%A1ulico
http://artemisa.unicauca.edu.co/~hdulica/2_vertederos.pdf
<http://es.scribd.com/doc/47571058/vertederos-hidraulicos-txt>
- Hidráulica básica de los vertederos:
<http://www2.alterra.wur.nl/Internet/webdocs/ilri-publicaties/publicaties/Pub38/pub38-h7.0.pdf>
- Ecuación de Torricelli:
http://es.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli

- Principio de Bernouilli:
http://es.wikipedia.org/wiki/Principio_de_Bernoulli
- Cálculo de pérdidas de carga en tuberías:
http://www.miliarium.com/Prontuario/MedioAmbiente/Aguas/PerdidaCarga.asp#Manning_%281890%29
- Propiedades físicas del agua:
<http://www.miliarium.com/Prontuario/Tablas/Aguas/PropiedadesFisicasAgua.asp>

Material gráfico:

- Fotografía de los canales de Holanda:
<http://www.fotsoimagenes.com/wp-content/uploads/2013/09/holanda.jpg>
- Canales de Cumbemayo, Cajamarca, Perú:
<http://hidraulicainca.com/cajamarca/canal-cumbemayo/>
- Canal de Moeris en la actualidad, Egipto:
<http://bibliareflexiones.blogspot.com.es/2011/05/nueva-cronologia-parte-5a-jose-en.html>
- Canal de Corinto:
http://es.wikipedia.org/wiki/Canal_de_Corinto
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vessel_tugged_through_Corinth_canal.JPG
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Corinth,_Greece_%28NASA%29.jpg
- Camino de Corinto; diolkos:
<http://milugaresaqui.blogspot.com.es/2013/05/caminos.html>
- Compuertas tipo mitra con cierre de diedro. Canal de Castilla:
<http://www.canonistas.com/foros/urbana-rural-y-arquitectura/458642-canal-de-castilla.html>
- Canales de Brujas. Bélgica:
<http://es.forwallpaper.com/wallpaper/canal-in-stormy-bruges-belgium-134703.html>
- Canal de Castilla en Becerril:
<http://www.minube.com/rincon/canal-de-castilla-en-becerril-a401551>
- Fotografía del pantano de Puentes, Lorca, años después de su rotura:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rotura_del_pantano_de_Puentes_%28Lorca%29.jpg
- Vertedero de pared delgada:
http://es.wikipedia.org/wiki/Vertedero_de_pared_delgada